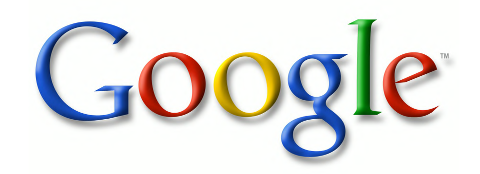
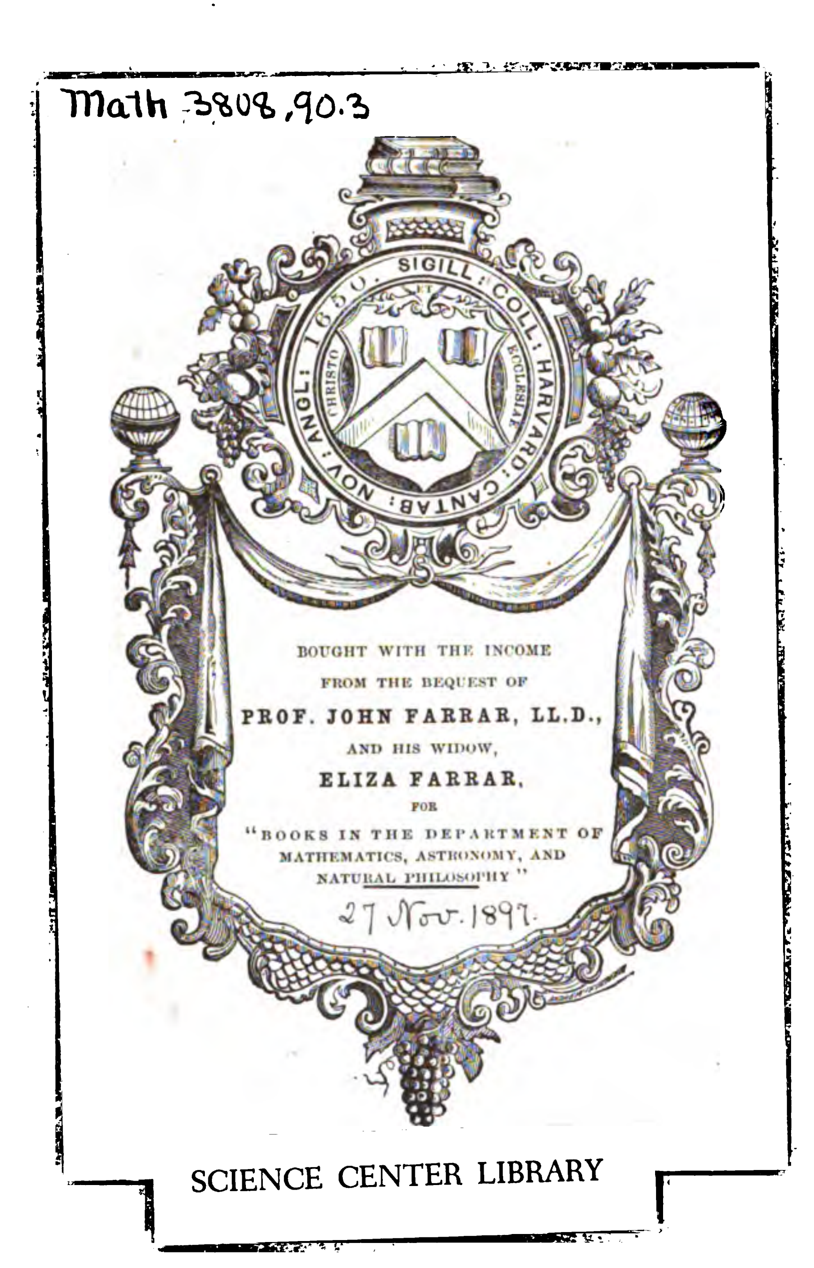
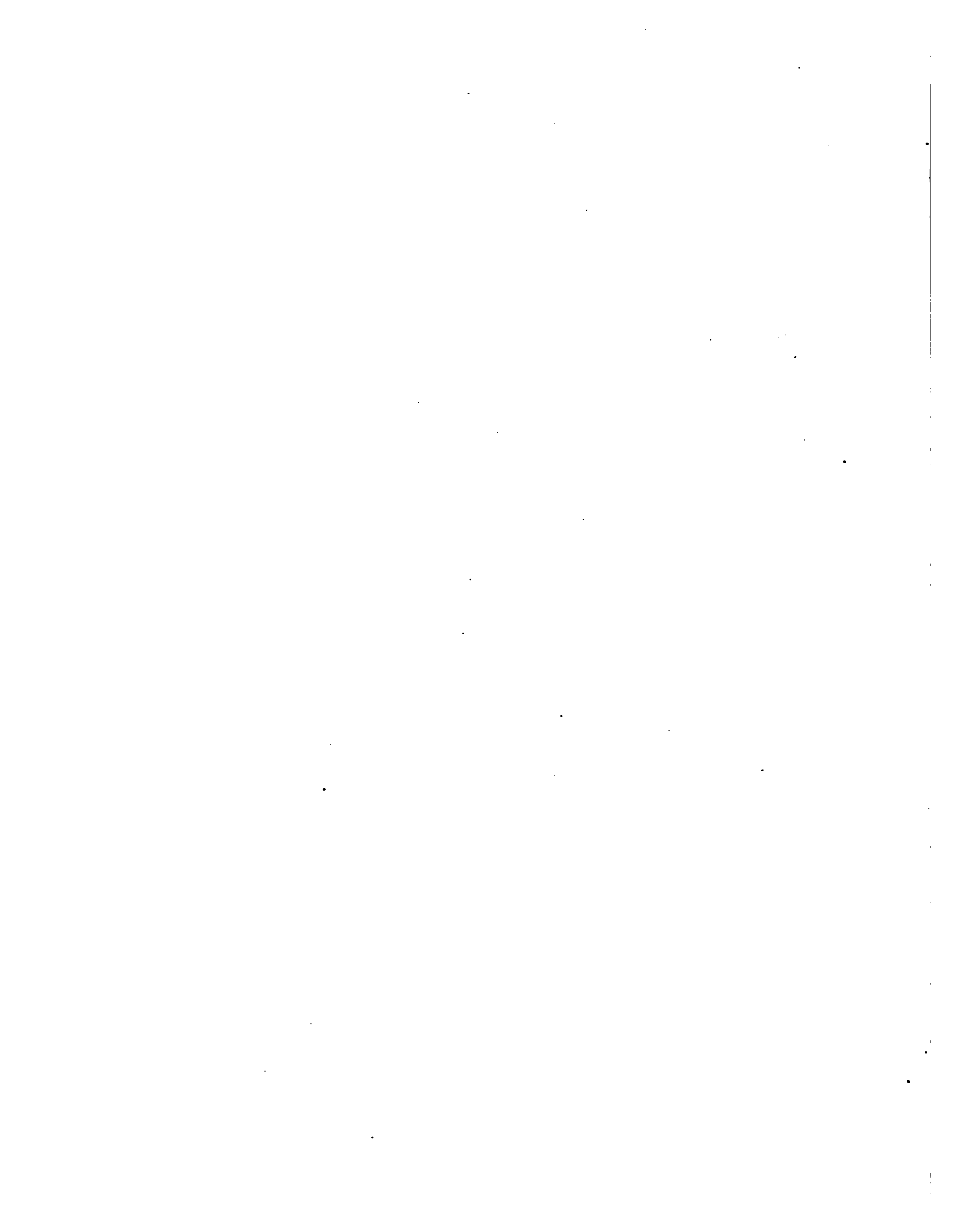



SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
27 Nov. 1897.



Abriss einer Theorie

der

Functionen einer complexen Veränderlichen

und der

Thetafunctionen.

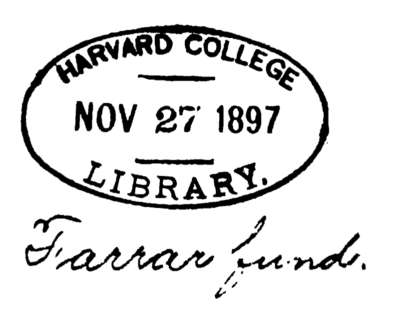
Von

Johannes Thomae
in Jena.

Dritte, erheblich vermehrte Auflage.

Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten
und 1 lithogr. Figurentafel.

Halle a. S.
Verlag von Louis Nebert.
1890.


HARVARD COLLEGE
NOV 27 1897
LIBRARY.
Farrar fund.

VORWORT.

Wie die frühern Auflagen, so soll der Abriss auch in seiner jetzigen Gestalt eine kurze Uebersicht über die fundamentalen Eigenschaften der Thetafunctionen einer Veränderlichen denen in die Hand geben, welche eine grössere Vorlesung über elliptische Functionen hören. Die unentbehrlichen Sätze aus der allgemeinen Functionentheorie sind einleitend voraufgeschickt, und zwar nach einer Methode, welche auf Riemann's geniale Sätze und Gebilde leitet. Eine rein auf Potenzreihen sich stützende Functionentheorie gewährt durch ihre Consequenz gewiss Befriedigung, andrerseits aber ist es für mich zweifellos, dass eine wirkliche Einsicht in einen algebraischen Functionenbereich und dessen Integrale nur auf Grund der Vorstellung Riemann'scher Flächen möglich ist.

Die neue Auflage enthält einige Untersuchungen der frühern über unendlich verzögerte Convergenz und Gebietsstetigkeit, die heute in den elementaren Lehrbüchern zu finden sind, nicht mehr. Auch die Mannigfaltigkeit der Darstellungsformen ist etwas beschränkt worden. Dafür sind die doppelt periodischen Functionen und elliptischen Integrale vollständiger behandelt, und es ist mein Bestreben gewesen, das Buch praktisch brauchbarer zu machen, zu welchem Zweck noch besonders eine Sammlung von Formen und Formeln angehängt ist. Manche neuere Untersuchung hat Platz gefunden.

Die Bezeichnung der elliptischen Functionen ist die überlieferte Jacobi'sche, es sind aber unter dem Text auch die Weierstrass'schen Functionen definirt, und ihre Beziehungen zu den alten Formen angegeben.

Von grösseren Werken, wie Briot und Bouquet, Königsberger, Rausenberger, Halphen, Durège, dem mehr historisch gehaltenen von Enneper und andern unterscheidet sich das vorliegende Buch durch seine knappere Form und sein beschränkteres Ziel, welches die allgemeine Transformation ausschliesst, aber auch, wie ich glaube, vielfach in den eingeschlagenen Wegen; und so hoffe ich, dass dasselbe, wie die früheren Auflagen, auch in seiner neuen Gestalt neben jenen wird bestehen und seinen Zweck erfüllen können.

Jena 1889. J. THOMAE.

Inhaltsverzeichniss.

Functionentheorie (Seite 1—36).

Die doppelt periodischen Functionen (Seite 36—87).

Zweiwerthige Functionen vom Geschlecht Eins und ihre Integrale (Seite 87—123).

Integrale zweiter und dritter Gattung (Seite 123—129).

Zusätze und Nachträge (Seite 129—134).

Die Formelsammlung bedarf ihrer Knappheit wegen keines besonderen Inhaltsverzeichnisses.

Nach dem Drucke bemerkte Irrthümer.

Seite 3 Zeile 9 v. u. lies: $(a'', a''+a', a)$ statt $(a', a''+a', a)$.
Seite 5 Zeile 12 v. o. lies: „die die Fläche in Stücke zerreisst" statt „die sie in Stücke zerreisst".
Seite 6 letzte Zeile sind xy durch ein Komma zu trennen.
Seite 8 Zeile 5 v. u. lies: „Differentiation" statt „Differentation".
Seite 18 § 13 Zeile 6 v. u. lies: $z^2, w(z)$ statt $z^2(w)z$.
Seite 25 Zeile 14 v. o. lies: „um" statt „am".
Seite 26 Zeile 3 v. u. lies: „convergent" statt „conconvergent".
Seite 27 Zeile 3 v. u. ist dz hinter dem Integralzeichen einzuschalten.
Seite 29 Zeile 9 v. o. sind die Punkte hinter a_n zu streichen. — Zeile 4 v. u. lies m statt n.
Seite 36 ist im ersten Absatz der Index o stets durch den Index 0 (Null) zu ersetzen.
Seite 37 § 35 zweiter Absatz Zeile 5 lies: $2n\pi_3 = 2m\pi_3 + 2\mu_1\pi_1 + 2\mu_2\pi_2$ statt $\equiv$.
Seite 41 § 37 Zeile 11 v. o. ergänze „ersten" vor „Residuen".
Seite 43 Zeile 10 v. u. lies: $\omega(a_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2))$ statt $\omega(u_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_1))$.
Seite 48 § 43 Zeile 4 v. u. ist im dritten Gliede der Doppelgleichung der Factor $1:S'(0)$ zu streichen.
Seite 50 Zeile 1 und Zeile 12 lies $(n+1)$ für n unter dem ersten Productzeichen $\mathfrak{P}$. — In der Anmerkung lies $m-1$ für $m+1$ hinter dem Zeichen $\mathfrak{S}$.
Seite 55 erste Anmerkung Zeile 6 lies $(n+1)$ für n unter dem ersten Zeichen $\mathfrak{P}$.
Seite 56 Zeile 3 v. o. lies im Exponenten $-\mu\mu\tau p$ statt $-2\mu\mu p\tau$.
Seite 60 Zeile 11 v. o. ist 2 von c^2 zu streichen. — Zeile 17 v. o. lies: $(-2sa^2\lambda\, ca\lambda + ca\lambda\, da^2\lambda)^2$. — Zeile 21 v. o. lies: $y:r$ statt $y:s$. — Zeile 26 ergänze: „rationalen Ausdrücken in" vor $\sin t_1$, $\sin t_2$.
Seite 62 Zeile 14 v. u. lies: „längs b" statt „längs l".
Seite 66 letzte Zeile von § 58 lies: $1:\sqrt{1+k'}$ statt $i:\sqrt{1+k'}$.
Seite 69 Zeile 9 v. u. lies: $sa^4(2K:3)$ statt $sa^2(2K:3)$.
Seite 73 sind in der Figur am unteren Theile der Linie a die Zeichen $+$ $-$ zu vertauschen.
Seite 74 § 65 letzte Zeile lies: „Durchmesser" statt „Radien".
Seite 74 letzte Zeile lies: $\vartheta_{hg}(\bar{z}, \bar{\tau})$ für $\bar{\vartheta}_{hg}(\bar{z}, \bar{\tau})$.
Seite 77 Formel I) lies: $\alpha\delta + \psi$ statt ψ, und ersetze die Function ϑ auf der rechten Seite durch $\vartheta_{\gamma\delta, \alpha\beta}$. — In Formel II) lies auf der rechten Seite: ϑ_{gh} statt ϑ_{hg}.
Seite 78 Zeile 3 v. u. lies in der zweiten ϑ-Function: $\sigma \pm \frac{i\pi}{2n}$ statt $\sigma \pm \frac{2n}{i\pi}$.
Seite 80 § 70 Formel II) lies: $\mathfrak{sa}(u:\varrho)$ statt $\mathfrak{sa}(\varrho u)$.
Seite 87 § 74 Zeile 4 v. u. lies zweimal lgv (logarithmus vulgaris) für lg. — Zeile 10 v. u. lies: $\mathfrak{sa}(Mu)$ für $\mathfrak{sa}\,u$.
Seite 86 § 75 vorletzte Zeile lies k statt k'.
Seite 103 Zeile 17 lies: $2\pi_1$, $2\pi_2$ statt π_1, π_2.
Seite 110 Zeile 2 v. u. lies: $abs\,\zeta < 1$ statt > 1.
Seite 120 Zeile 5 v. u. lies: $(t-\beta)^3$ statt $(t-\alpha)^3$.
Seite 126 Zeile 5 v. o. lies: $\frac{K-E}{K}u$ statt $\frac{K-E}{K}$.
Seite 128 Zeile 10 v. u. lies: $Z_{00}(u)$ statt $Z_{01}(u)$.

Functionentheorie.

Einleitung. Die Thetafunctionen pflegen nicht so sehr um ihrer selbst willen studirt zu werden, als wegen der mehrfach periodischen Functionen, die als Quotienten derselben darstellbar sind. Beschränkt man sich wie hier auf eine Veränderliche, so sind es die doppelt periodischen Functionen, die durch Thetafunctionen einer Veränderlichen ihre einfachste Darstellung finden und sich aus ihnen ableiten lassen. Umgekehrt aber führt das Studium der doppelt periodischen Functionen mit einer gewissen Nothwendigkeit auf die Thetafunctionen. Die Eigenschaften dieser analytischen Gebilde lassen sich mit ziemlicher Vollständigkeit durch die Methoden der sogenannten elementaren Functionentheorie auffinden. Den Unterschied zwischen elementarer Functionentheorie und der allgemeinen oder der Functionentheorie schlechthin will ich dabei in folgender Weise verstanden wissen. — Die elementare Functionentheorie baut ihre Begriffe auf die Potenzreihen auf und leitet ihre Sätze aus der Darstellung der Functionen durch Potenzreihen her. Lässt sich eine Function von z an der Stelle a durch eine Reihe darstellen, die nur ganze positive Potenzen enthält, lässt sich also für ein bestimmtes Werthgebiet um a die Function $f(z)$ in die Form bringen

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \frac{(z-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(z-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{fac\, n} f^{(n)}(a) + \ldots,$$

so heissen $f'(a)$, $f''(a)$, .. $f^{(n)}(a)$, .. bez. die erste, zweite, .. $n$te .. Ableitung von f an der Stelle a. Es kann aber a wieder veränderlich genommen, wieder z für a gesetzt werden. Dadurch dass dieses z in jede beliebige Nähe einer Stelle gebracht wird, die irregulär ist, in der eine Darstellung der Function durch eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihe nicht möglich ist, lässt sich zuweilen der Begriff der Ableitung auch auf singuläre Stellen ausdehnen. In dieser Begrenzung des Begriffes „Ableitung“ sehe ich zugleich die Begrenzung des Begriffes „elementar“. Der Begriff des Differentialquotienten als des Grenzwerthes eines gewissen Quotienten hat einen wohlbestimmten Sinn in unendlich vielen Fällen, in denen der Begriff der Ableitung in dem hier gebrauchten Sinne nicht anwendbar ist. Existirt eine Ableitung, so ist sie zugleich Differentialquotient. Aehnlich lässt sich für das Integral eine Begriffsbestimmuug durch Potenzreihen, die die elementare heissen kann, geben und eine allgemeinere durch den Grenzwerth einer Summe. Die allgemeine Functionentheorie geht also im Gegensatz zur elementaren bei der Untersuchung der Functionen nicht von vornherein und principiell von ihrer Darstellung durch Potenzreihen aus, sie entschlägt sich aber der Hilfsmittel, welche die Theorie der Potenzreihen bietet, keineswegs. Für die sogenannten analytischen Functionen — und von solchen wird hier wesentlich die Rede sein —, die elementar durch Potenzreihen definirt sind, stellt sie eine Infinitesimalbedingung auf, gelangt aber schliesslich auch zu dem Resultat, dass die so definirten Functionen durch Potenzreihen darstellbar seien. Trotz dieses Endresultates soll hier von den Methoden der allgemeinen Functionentheorie Gebrauch gemacht werden, weil es mir scheint, dass die Einsicht in diesen Stoff durch jene Methoden doch nicht unerheblich gefördert werde. Die Unab-

hängigkeit mancher Sätze über Functionen von ihrer Darstellbarkeit durch Potenzreihen ist ohnehin an sich von Interesse. Die Methoden, die hier zur Verwendung kommen, wenden sich zuweilen an die Intuition, namentlich bei den Sätzen, die den Begriff „Zusammenhang" betreffen, der bei den sogenannten Riemann'schen Flächen auftritt. Denjenigen, welche dies tadeln möchten und die Riemann'schen Flächen als der reinen Analysis fremd von der Functionentheorie fern halten wollten, muss ich die Frage entgegenstellen, ob sie es heute schon wirklich für möglich halten, zu einer vollkommenen Einsicht über mehrdeutige, insbesondere über algebraische Functionen und deren Integrale zu gelangen, wenn das Auge der Intuition geschlossen wird und die analytischen Gebilde nur mit dem Auge des discursiven Denkens betrachtet werden. — Wenn wir nun bei unserem Vorgehen einerseits etwas weit ausholen, als ob die elementare Functionentheorie noch unbekannt wäre, wenn wir aber andererseits nicht so ganz einfache Sätze dieser Theorie wie z. B. die Methode der unbestimmten Coefficienten ohne Weiteres benutzen, so bedarf diese Inconsequenz im Voraus der Entschuldigung und Motivirung. Die elementare Functionentheorie wird in ihren Hauptsätzen in der That als bekannt vorausgesetzt. Von der Exponentialfunction und dem Logarithmus, den goniometrischen und cyclometrischen Functionen wird sogleich Gebrauch gemacht. Gleichwohl erfordert die neue Betrachtungsweise und die veränderte Definition der analytischen Function ein gewisses Eingehen auf die allerersten Dinge, und manche wohlbekannten Sätze sind nach den neuen Methoden herzuleiten, theils um deren Brauchbarkeit zu zeigen, theils auch um die Anwendbarkeit auf noch unbekannte Gebilde vorzubereiten. So wird es begreiflich sein, warum es zwar hier für nöthig erachtet wird Elementares vielfach zu erweisen, warum aber auf lückenlose Vollständigkeit im Elementaren Verzicht geleistet wird.

Es darf aber auch nach einer andern Richtung hin Vollständigkeit nicht erwartet werden. Das Ziel dieses Werkchens ist ein bestimmt begrenztes. Die Functionentheorie wird hier nur soweit behandelt und es werden im Wesentlichen nur solche Functionen, Sätze und Methoden vorgebracht, deren Kenntniss für die Untersuchung der Thetafunctionen, der doppelt periodischen Functionen und der elliptischen Integrale nöthig ist. Aber auch in Bezug auf diese Functionen legt sich dieses Buch noch die Beschränkung auf, dass es die allgemeine Transformationstheorie von der Behandlung ausschliesst.

§ 1. Die complexen Zahlen, d. h. die Zahlen z von der Form $x+yi$, worin $i=\sqrt{-1}$ ist und x und y reelle Zahlen sind, bilden ein stetiges Grössengebiet von zwei Ausdehnungen. Ebenso bilden die Punkte einer Ebene ein stetiges Grössengebiet von zwei Ausdehnungen. Man ist deshalb im Stande, mit Gauss die complexen Zahlen auf die Punkte einer Ebene so zu beziehen, dass jeder Punkt der Ebene als Träger einer complexen Zahl angesehen wird und jeder Zahl ein Punkt entspricht, und dass mit jeder stetigen Aenderung der Zahl eine stetige Aenderung ihres Ortes und umgekehrt verbunden ist. Ob die Eindeutigkeit eine ausnahmslose ist, und ob es nicht auch Mannigfaltigkeiten von zwei Ausdehnungen giebt, deren Punkte sich den Zahlen nicht eindeutig zuordnen lassen, wird späterer Erörterung vorbehalten.

Die Beziehung der Zahlen und Punkte auf einander wird am einfachsten dadurch hergestellt, dass man den durch die rechtwinkligen Coordinaten x (Abscisse) und y (Ordinate) bestimmten Punkt zum Träger der complexen Zahl $z=x+yi$ macht. Er heisst kurz der Punkt z. Nennt man die Strecke oder den Radiusvector r vom Anfangspunkt der Coordinaten bis zu dem Träger der Zahl z — durch dieselbe Einheit als die Coordinaten x, y gemessen — den absoluten Betrag von z und bezeichnet ihn mit $abs\,(z)$, gelesen absolut z, und den Winkel t, den dieser Radiusvector mit der positiven x-Achse macht, gemessen durch den Bogen des Einheitskreises, der zwischen seinen Schenkeln liegt, und in dem der Drehung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne, den arcus der Zahl und bezeichnet ihn mit $arc\,(z)$, so kann ebenso, wie der Träger der Zahl z durch die Polarcoordinaten r und t, die Zahl z selbst durch ihren absoluten Betrag und ihren arcus bestimmt werden. Da nämlich

$$x=r\cos t=abs\,z\,.\cos arc\,z\,,\ y=r\sin t=abs\,z\,.\sin arc\,z$$

ist, so folgt:

$$z=x+yi=r(\cos t+i\sin t)=r\,.\,e^{ti}=abs\,z\,.\,e^{i\,arc\,z}.$$

Umgekehrt drücken sich auch absoluter Betrag und arcus leicht durch den reellen und imaginären Bestandtheil der Zahl z, also durch x und y aus. Es ist nämlich

$$abs(z) = r = \sqrt{x^2 + y^2},\quad arc(z) = t = arc\,tg(y:x),$$

worin das Wurzelzeichen stets positiv zu nehmen, der Winkelbogen aber in dem Quadranten zu nehmen ist, in welchem die Zahl z liegt.

Complexe Zahlen, deren Träger symmetrisch zur Achse des Reellen, zur x-Achse liegen, deren imaginäre Bestandtheile entgegengesetzte Zeichen haben, heissen conjugirt. Ihre arcus sind entgegengesetzt, ihre absoluten Beträge gleich. — Die Polardarstellung einer Zahl ist nicht völlig eindeutig, so zwar, dass zu jedem absoluten Betrage und arcus nur eine Zahl gehört, dass aber umgekehrt zu jeder Zahl unendlich viele arcus gehören, die sich um ein Multiplum von 2π unterscheiden. Liegt der Winkel zwischen $-\pi$ ausschliesslich und $+\pi$ einschliesslich, so nennen wir die Darstellung die Hauptdarstellung, den arcus den Hauptarcus der Zahl. Der arcus der Zahl Null ist gänzlich unbestimmt. — Diese Mehrdeutigkeit mahnt dazu, die Polardarstellung mit einer gewissen Vorsicht zu gebrauchen. In allen Ausdrücken aber, in denen der arcus als Argument der trigonometrischen Functionen sinus, cosinus, tangens auftritt, kommt die Vieldeutigkeit nicht in Betracht, weil diese Functionen die Periode 2π haben, also für alle möglichen Werthe des arcus denselben Werth annehmen.

Wir erinnern an dieser Stelle an die bekannten Sätze, *dass das Product zweier complexen Zahlen das Product ihrer absoluten Beträge zum absoluten Betrag, die Summe ihrer arcus zum arcus hat, und dass der Quotient zweier Zahlen den Quotienten der absoluten Beträge zum absoluten Betrag, die Differenz der arcus zum arcus hat,* welche Sätze aus der Gleichung $z = re^{ti}$ unmittelbar folgen.

In Zeichen:

$$abs(a\,.\,a') = abs\,a\,.\,abs\,a',\quad arc(aa') \equiv arc\,a + arc\,a',\quad abs(a:a') = abs\,a : abs\,a',\quad arc(a:a') \equiv arc\,a - arc\,a'.$$

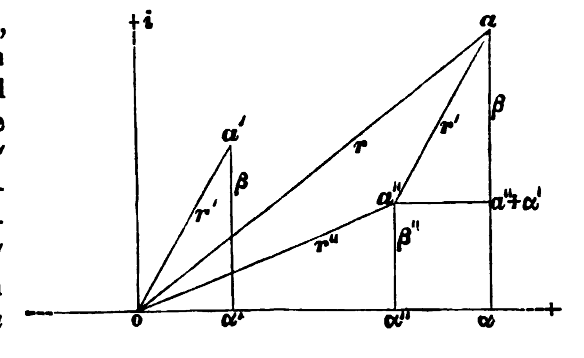
Das Zeichen $\equiv$ (congruent) bedeutet hier, dass die beiden Seiten sich um ein Multiplum von 2π unterscheiden dürfen.

Hätte man die Absicht eine Theorie der Exponential- und Kreisfunctionen als Functionen einer complexen Veränderlichen zu entwickeln, so dürfte man $cos\,t + i\,sin\,t$ nicht durch e^{ti} ersetzen und müsste $cos\,t$ und $sin\,t$ als die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 1 und dem Winkel t ansehen. Hier wird jedoch die Erweiterung jener Functionen für complexe Veränderliche als bekannt vorausgesetzt, und es werden nur der Analogie halber mit höheren Transcendenten hier und da Eigenschaften derselben entwickelt. Eben deshalb ist auch t hier als eine Zahl, als die Maasszahl der Länge eines Kreisbogens mit dem Halbmesser Eins, und nicht als ein in Graden ausgedrückter Winkel aufzufassen.

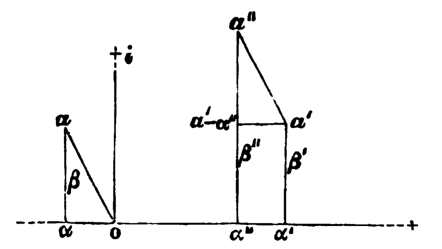
Wir erinnern ferner an den Satz: Ist $a = \alpha + \beta i$ die Summe zweier complexer Zahlen $a' = \alpha' + \beta' i$, $a'' = \alpha'' + \beta'' i$, so ist stets

$$abs\,a \leqq abs\,a' + abs\,a''.$$

Stellt man sich nämlich die Zahlen a, a', a'' graphisch dar, wie dies in nebenstehender Figur geschieht, und zieht von a'' eine Parallele zur x-Achse bis zum Träger der Zahl $a'' + \alpha'$, so sind $(a', a'' + \alpha', a)$ und (o, α', a') congruente Dreiecke, und demnach die Strecke $a''a = oa'$ gleich $abs\,a' = r'$. Ferner ist $oa'' = abs\,a'' = r''$, $oa = abs\,a = r$. Es bilden r, r', r'' ein Dreieck, und da immer zwei Seiten eines Dreiecks zusammen grösser als die dritte sind, so ist $abs\,a < abs\,a' + abs\,a''$, wenn nicht a' und a'' gleiche Winkel (in gleichen Quadranten) haben, in welchem Falle $abs\,a = abs\,a' + abs\,a''$ ist.



Die Differenz a zweier complexer Zahlen a' und a'' hat die Strecke zwischen den Trägern der beiden Zahlen zum absoluten Betrage, und den arcus des Winkels, welchen diese vom Subtrahendus zum Minuendus hin gerichtete Strecke mit der positiven x-Achse macht, zum arcus.



Stellt man nämlich die Zahlen $a' = \alpha' + \beta' i$, $a'' = \alpha'' + \beta'' i$ und deren Differenz $a'' - a' = a = \alpha + \beta i$ graphisch dar, so sind die Dreiecke $(a', a' - a'', a'')$ und (o, α, a) congruent, und demnach $abs\,(a) = r = (a', a'')$, und es ist (o, a) in gleichem Sinne parallel (a', a''), also der arcus, den die Zahl a besitzt, derselbe als der des Winkels, welchen die Strecke (a', a'') mit der positiven x-Achse macht.

Die Repräsentation der complexen Zahlen durch die Punkte einer Ebene gewährt manche Bequemlichkeiten, namentlich bei Bestimmung von Zahlengebieten und für die Terminologie. So ist eine stetige einfach ausgedehnte Zahlenreihe durch eine irgendwie gegebene Curve, deren Punkte die Träger jener Zahlen sind, ausreichend bestimmt. Oder es wird durch ein aus der Ebene ausgeschnittenes Stück ein zweifach ausgedehntes, begrenztes Zahlengebiet genau definirt; z. B. durch einen um den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Radius k geschlagenen Kreis wird ein Zahlengebiet abgegrenzt, welches analytisch durch die Bedingung $abs\, z < k$ gegeben ist. Es ist für manche Untersuchungen wichtig, solche aus der Ebene geschnittene Stücke in Bezug auf die Ordnung ihres Zusammenhanges zu charakterisiren, was zuerst Riemann gethan hat.

§ 2. Zusammenhang. Riemann hat gefunden, dass jedem Stück einer ebenen oder krummen Fläche, welche sich nicht durch Spaltung verzweigt, eine charakteristische Zahl zugehört, welche er die Vielfältigkeit ihres Zusammenhanges nennt. Es werde gleich hier bemerkt, was ebenfalls von Riemann entdeckt worden ist, dass man die algebraischen Functionen, und daher auch die algebraischen Curven, mit bestimmten geschlossenen Flächen in eindeutige Beziehung setzen kann, für welche die Zahl, die die Vielfältigkeit des Zusammenhanges angiebt, stets ungerade, also von der Form $2p + 1$ ist. Die ganze Zahl p nun wird heute das Geschlecht des algebraischen Gebildes sowohl, als auch der zugehörigen Curve genannt. Es spielt diese Zahl in der Analysis sowohl als in der Geometrie eine grosse Rolle, die ihren Grund wesentlich darin hat, dass diese Zahl allen Gebilden, die auf einander eindeutig bezogen werden können, unverändert zukommt, dass sie eine absolute Invariante ist. Wir brauchen auf diesen Begriff zunächst nur insoweit einzugehen, als es sich um Ebenenstücke handelt, die immer als wirklich zusammenhängende gedacht werden, die nicht aus getrennten Stücken bestehen, auch nicht aus solchen, die etwa nur durch Linien (ohne Breite) mit einander verbunden sind. In einem zusammenhängenden Stücke kann man von jedem Punkte zu jedem andern mittels eines im Stücke verlaufenden Zuges gelangen, der die Begrenzung weder überschreitet noch berührt.

Eine im Innern eines Flächenstückes verlaufende, sich nicht schneidende (knotenlose) Linie nennt man einen Querschnitt, wenn sie zwei Punkte der Begrenzung verbindet. Verbindet die Linie nicht zwei Punkte der Begrenzung, sondern kehrt sie in sich selbt zurück, wie z. B. die Kreislinie, so heisst diese Linie ein Rückkehrschnitt.

Einfach zusammenhängend heisst ein Ebenenstück, wenn es durch jeden in ihm möglichen Rückkehr- oder Querschnitt zerstückelt, d. h. in Theile zerlegt wird, die nicht mehr zusammenhängen. Einfach zusammenhängend ist z. B. die Fläche eines Kreises, einer Ellipse, eines Parallelogramms, und auch die ganze unendliche Ebene.

Verstehen wir hier unter einer eindeutigen Deformation eines Ebenen- oder gleich auch Flächenstückes eine solche Verzerrung, Dehnung, Zusammenziehung oder auch Biegung, Abwickelung desselben, welche kein Flächenstück in getrennte Stücke zerreisst oder getrennte Theile zusammenfliessen lässt, längs vorher von einander getrennter Begrenzungsstücke mit einander verbindet, keine Linie in einen Punkt, kein Flächenstück in eine Linie verwandelt, oder umgekehrt einen Punkt zu einer Linie auseinander zieht, kurz eine solche Abänderung eines Stückes in ein anderes, bei der zwischen

den Punkten des ersten und zweiten eine ein-eindeutige Beziehung besteht. so dass jedem Punkte des ersten ein und nur ein Punkt des letzteren entspricht und umgekehrt, — so ist es beinahe selbstverständlich, dass bei jeder eindeutigen Deformation ein einfach zusammenhängendes Stück einfach zusammenhängend bleibt, dass die Eigenschaft einfach zusammenhängend zu sein dieser Deformation gegenüber eine Invariante, eine unveränderliche Eigenschaft ist. Denn jedem knotenlosen Zuge in dem einen Stücke entspricht ein eben solcher im deformirten. Von allen Sätzen, die den eindeutigen Deformationen gegenüber Invarianten sind, sagt man, dass sie der „Analysis situs" angehören.

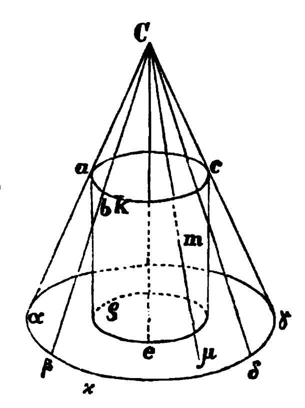
Die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Ebenen- oder auch Flächenstückes besteht aus einem einzigen (knotenlosen) continuirlichen, in sich zurück laufenden Zuge, wenn das Stück überhaupt begrenzt ist. Bei einer Begrenzungslinie liegt das begrenzte Flächenstück entweder nur auf einer Seite, oder zuweilen aber auch auf beiden Seiten. Eine Deformation, welche die beiden Ufer einer Linie im letzteren Falle von einander trennt, ist nicht etwa eine solche, die sie in Stücke zerreisst, sondern eine solche Trennung ist eine zulässige. Wenn beide Ufer eines Streifens begrenzen, so ist es ganz gleichgiltig, ob diese weit von einander oder nahe bei einander liegen, ob sie so zu sagen unendlich nahe zusammen liegen und die beiden Seiten einer Linie bilden, die für das Auge eben nur eine Linie ist. Ein Zug aber, der über die ganze Begrenzung geht, muss über beide Ufer laufen, wenn beide begrenzende sind.

Bestände die Begrenzung des Stückes T aus mindestens zwei getrennten Linien, so könnte man diese wegen des vorausgesetzten Zusammenhanges durch einen Querschnitt l verbinden, und dieser könnte T nicht zerstückeln. Denn da l die Begrenzung nur im Anfangs- und Endpunkt trifft, so kann man stets von einem Punkte auf dem einen Ufer von l zu dem benachbarten Punkte auf dem gegenüberliegenden gelangen, ohne das durch l und die frühere Begrenzung eingerahmte Stück T' zu verlassen. Hierzu braucht man nur längs l auf demselben Ufer bleibend bis zu dem ersten Begrenzungsstück von T zu gehen, dann dieses, welches von l nicht wieder getroffen wird, vollständig zu umlaufen, bis man auf dem andern Ufer von l ankommt, und kann nun auf diesem Wege bleibend zu dem festgesetzten Endpunkte gelangen. Verbindet also ein Zug in T zwei Punkte $m\,m'$, so geschieht dies entweder an sich durch einen in T' verlaufenden Zug, oder dieser schneidet l. Dann trennt man diesen Zug durch l und verbindet die getrennten Stücke durch den oben beschriebenen Umgang und stellt so durch Addition eines neuen Zuges zum alten einen Weg her, der m mit m' in T' verbindet: Es ist also l ein nicht zerstückelnder Querschnitt, T gegen die Voraussetzung nicht einfach zusammenhängend.

Für ein ebenes Stück gilt auch der umgekehrte Satz. *Besteht die ganze Begrenzung eines Stückes aus einem continuirlichen knotenlosen Zuge, so ist es einfach zusammenhängend.* Er lässt sich natürlich unmittelbar auf solche krummen Flächen übertragen, die in eine Ebene eindeutig deformirbar sind. Wir berufen uns auf die Intuition, wenn wir den Satz aussprechen: eine knotenlose, in sich zurück laufende oder geschlossene Linie s in einer Ebene theilt dieselbe in zwei Theile, die so beschaffen sind, dass man aus dem einen in den andern nicht in der Ebene gelangen kann, ohne die Linie s zu überschreiten. Bildet nun die geschlossene, continuirliche, knotenlose Linie s die Begrenzung eines Ebenenstückes T, so wird dieses durch jeden Querschnitt l zerstückelt, in zwei Theile zerlegt. Denn da l zwei Punkte von s verbindet, so wird durch diese Punkte s in zwei Stücke s_1 und s_2 zerlegt. Die Linie s_1 und das eine Ufer von l — es sei l_1 — bilden einen continuirlichen, geschlossenen Zug und begrenzen deshalb ein Gebiet T_1. Das andere Ufer l_2 begrenzt mit s_2 zusammen ein Gebiet T_2. T_1 und T_2 sind getrennte Stücke. — Ist l ein Rückkehrschnitt, so begrenzt derselbe ein Stück, aus dem man nicht heraus zu einem Punkte ausserhalb, z. B. zu einem in der Nähe von s in T gelegenen Punkte, gelangen kann. Also jeder Quer- oder Rückkehrschnitt zerstückelt T, die Fläche ist einfach zusammenhängend. — Dass die ganze unendliche Ebene einfach zusammenhängend sei, ist anschaulich klar. Dass aber jedes begrenzte, einfach zusammenhängende, ebene oder in ein ebenes deformirbare Stück eindeutig in die Fläche eines Kreises oder eines Parallelogrammes deformirt werden könne, darf ebenfalls als durch Anschauung evident angesehen werden.

Ein Flächenstück ist zweifach zusammenhängend, wenn es durch einen Querschnitt in ein einfach zusammenhängendes zerschnitten werden kann. Die Begrenzung des letzteren enthält die beiden Ufer des gezogenen Querschnitts. Die Eigenschaft, zweifach zusammenhängend zu sein, die natürlich der eindeutigen Deformation gegenüber invariant ist, wird dadurch zu einer bestimmten, dass das Stück durch jeden Querschnitt, welcher es nicht zerstückelt, in ein einfach zusammenhängendes Stück verwandelt wird. Ist das ebene Stück T nicht einfach zusammenhängend, so kann nach den vorauf gehenden Erörterungen seine Begrenzung nicht aus einem continuirlichen Zuge bestehen, sondern muss mindestens zwei solche Züge s_1, s_2 enthalten. Verbindet man zwei Punkte desselben Begrenzungsstückes, z. B. s_1, durch einen Querschnitt l in T, so bildet das eine Ufer von l mit einem Theile von s_1 zusammen einen continuirlichen Zug, schneidet ein Stück von T vollständig ab, zerstückelt T. Ein Querschnitt l, der T nicht zerstückelt, kann daher nur einen Punkt von s_1 mit einem Punkte von s_2 verbinden. Soll nun das so erhaltene Stück T' einfach zusammenhängend sein, so muss seine ganze Begrenzung aus einem Zuge bestehen, wie dies mit den beiden Ufern von l und mit den Linien s_1 s_2 zusammen wirklich der Fall ist. Es kann demnach die Begrenzung von T nicht ausser s_1 s_2 noch etwa ein drittes Stück s_3 enthalten, sondern sie besteht nur aus den getrennten Stücken s_1 s_2. Verbindet man s_1 s_2 durch einen beliebigen anderen Querschnitt, so bilden s_1 s_2 und die beiden Ufer desselben zusammen jedesmal einen continuirlichen Zug; das Stück wird also durch jeden nicht zerstückelnden Querschnitt in ein einfach zusammenhängendes verwandelt, w. z. b. w.

Als Typus einer zweifach zusammenhängenden Fläche kann das ringförmige Stück zwischen zwei concentrischen Kreisen angesehen werden, oder auch die Oberfläche eines Cylinderstückes zwischen zwei parallelen Ebenen. Nebenstehende Figur lässt unmittelbar erkennen, wie man die letztere Oberfläche durch Projection von C aus eindeutig in die Ringfläche deformiren kann. Der Rand k des Cylinders wird nach $\varkappa$, a nach α, b nach β, c nach γ, m nach μ, der Rand ϱ auf sich selbst, der Punkt e auf den Punkt e projicirt. Statt zu projiciren, kann man sich auch denken, dass der Cylinder durch Biegung verbunden mit Dehnung, die k nach $\varkappa$ überführt, ϱ unverändert lässt, mit dem Ringe zur Deckung gebracht wird.



Ein unbegrenztes Flächenstück (was nicht mit einem unendlichen zu verwechseln ist) kann niemals zweifach zusammenhängend sein. Denn hier müsste für den Querschnitt ein Rückkehrschnitt eintreten, dessen beide Ufer Begrenzung sein würden. Diese sind aber von einander getrennt, bilden also nicht einen continuirlichen Zug, mithin kann die durch ihn begrenzte Fläche nicht einfach zusammenhängend sein.

Giebt es in einem Flächenstück T mehrere Querschnitte, die es weder für sich noch zusammen noch mit der Begrenzung von T zerstückeln, so ist T mehrfach zusammenhängend, wie z. B. die Fläche eines Kreises, aus der mehrere kleinere Kreise heraus geschnitten sind. Jeder der inneren Kreise lässt eine Verbindung mit dem äusseren zu, und alle diese Verbindungen zerstückeln die Fläche nicht. Der Leser möge sich eine Zeichnung hiervon selbst machen. — Hiermit können wir vorläufig die Betrachtungen über den Zusammenhang abschliessen.

§ 3. Definition der Function einer complexen Veränderlichen. Jede Function $w(x, y)$ kann als Function der complexen Veränderlichen z angesehen und daher mit $w(z)$ bezeichnet werden. Denn ist z gegeben, so ist auch x und y gegeben, und ist w für jedes Werthepaar in einem Gebiete bestimmt, so ist w in demselben Gebiete für jedes z wohl bestimmt. Allein wir kommen dahin überein, *unter einer Function $w(x, y) = w(z)$ der complexen Veränderlichen z eine Function von x und y nur in einem solchen Gebiete zu verstehen, in welchem die Function $w(z) = w(x,y)$ ein vollständiges Differential besitzt, welches in die Form*

$$d\,w(z) = d\,w(x, y) = w'(xy)\,d\,x + i\,w'(xy)\,d\,y$$

gebracht werden kann, so dass

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = -i\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = w'(x,y) = w'(z)$$

ist, wovon nur in einzelnen Punkten und Linien Ausnahmen stattfinden dürfen. Aber es muss in solchen Ausnahmefällen diese Differentialgleichung noch bestehen bleiben, wie nahe auch der Punkt xy an die ausgeschlossenen Stellen gerückt wird, oder die Ausnahmen dürfen in keinem noch so kleinen Flächentheile stattfinden. Ausserdem wird stets vorausgesetzt, dass eine Function der complexen Veränderlichen z keine durch Abänderung ihres Werthes in einzelnen Punkten oder Linien hebbare Unstetigkeiten besitzt, wie z. B. wenn sie für alle Werthe von z den Werth 1, für $z = 0$ aber den Werth 0 hätte, oder wenn sie überall den Werth 0, längs der Strecke der reellen Achse von 1 bis 2 aber den Werth 3 hätte. Hingegen ist nicht ausgeschlossen, dass sie durch Annäherung der Variabeln x, y an einzelne Punkte in verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe erhalte, wie $e^{(1:z)}$ an der Stelle $z = 0$.

Das ebene Gebiet, in welchem die Function diesen Forderungen gerecht wird, braucht durchaus nicht einfach zusammenhängend zu sein. In den Theilen des Gebietes, in welchen die Hauptforderung, dass $dw = w'dx + iw'dy$ ein vollständiges Differential sei, welche Forderung die der Endlichkeit und Stetigkeit von selbst in sich schliesst, erfüllt ist, wollen wir die Function regulär nennen, in andern Punkten irregulär. Die Forderung eines vollständigen Differentials ist etwas beschränkender als die gewöhnliche, dass die partielle Differentialgleichung $i\partial w : \partial x = \partial w : \partial y$ erfüllt sein solle, und es können in der That dieser letzteren einige weniger beschränkende Bedingungen (Integrabilität der partiellen Differentialquotienten) hinzugefügt werden, durch welche der Begriff der Function einer complexen Veränderlichen noch hinreichend bestimmt wird. Da aber bei den hier folgenden Anwendungen ein Bedürfniss für solche Erweiterungen sich nicht ergiebt, so ziehen wir es vor, lieber eine etwas grössere Beschränkung einzuführen, als durch die Erweiterung subtile Untersuchungen hereinzuziehen, die besser Specialstudien überlassen bleiben.

Was es heisst, eine Function sei in einem Gebiete stetig, und dass ein Stetigkeitsgebiet in so kleine Theile von bestimmtem Flächeninhalt getheilt werden kann, dass die dem absoluten Betrage nach grösste Schwankung (Werthdifferenz) der stetigen Function in diesen Theilgebieten kleiner als eine beliebig kleine vorgegebene Zahl bleibt, setze ich als bekannt voraus.

§ 4. Die Potenzreihen sind reguläre Functionen. Pole. Residuen. Die Function $w(x,y) = x^2 + y^2$ befriedigt die partielle Differentialgleichung der vorigen Paragraphen nicht, ist also keine Function der complexen Veränderlichen in unserm Sinne; setzt man hingegen

$$w(x,y) = \tfrac{1}{2}\,lg(x^2 + y^2) + i\,artg(y:x),$$

so ist

$$i\partial w : \partial x = (ix + y):(x^2 + y^2) = \partial w : \partial y, \quad (x, y \gtrless 0),$$

und da auch noch höhere Differentialquotienten existiren, woraus das Bestehen des vollständigen Differentials folgt, so ist diese Function eine Function der complexen Veränderlichen z, gleich $lg\, z$. Es ist aber zu beachten, dass, wenn man auch $lg\, x^2 + y^2$ reell nimmt, doch $artg\,(y:x)$ nicht eindeutig ist. Beschränkt man aber x, y auf die Halbebene, in der x positiv ist, und nimmt dort den artg immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ an, so ist die Function bis in jede beliebige Nähe des Punktes $z = 0$ eine reguläre Function der complexen Veränderlichen z. Es wird diese Function später weiter untersucht werden. Die Funktion $w(x,y) = (x + yi - a)^n = (z - a)^n$, wenn n eine ganze positive oder negative Zahl ist, genügt in der ganzen z-Ebene den Anforderungen der Functionen einer complexen Veränderlichen z, nur wenn n negativ ist, im Punkte $z = a$ nicht selbst, wohl aber bis in jede beliebige Nähe desselben. Die Singularität, die diese Function für ein negatives n im Punkte a besitzt, ist die einfachste, die eine Function der complexen Veränderlichen annehmen kann. Ist eine Function $w(x,y) = w(z)$ an der Stelle a so irregulär, dass für ein ganzes positives n $\varphi(z) = (z - a)^n w(z)$, wenn für $z = a$ der Grenzwerth für $\varphi(z)$ genommen wird, regulär ist, so sagen wir, die Function $w(z)$ besitze an der Stelle $z = a$ einen n-fachen Pol oder ein Unendlich $n$ter Ordnung.

Ist eine Function in der Umgebung eines Punktes a durch eine Potenzreihe darstellbar,

$$w(z) = \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{(z-a)} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + A_3(z-a)^3 + \ldots,$$

so ist in der Umgebung jenes Punktes $w(z)$ eine Function der complexen Veränderlichen z, weil jedes Glied der Reihe der Forderung einer solchen Function genügt, und eine convergente Potenzreihe gliedweise differenzirt werden darf. Sind die Zahlen A_{-1}, A_{-2}, .. A_{-n} Null, so ist die Function im Convergenzgebiete überall regulär; ist A_{-n} nicht Null, so besitzt sie im Punkte a einen $n$fachen Pol, ein Unendlich $n$ter Ordnung. Die Zahlen A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, .. werden bez. erstes, zweites, drittes, .. **Residuum** der Function $w(z)$ im Punkte oder Pole a genannt. Ist der Pol nur einfach, so spricht man vom Residuum schlechthin.

Die rationalen Functionen von z, die transscendenten Functionen $\sin z$, $\cos z$, $tg\, z$, die Exponentialfunction sind überall und ihre Umkehrungen in Gebieten, in denen sie eindeutig definirt werden können, Functionen der complexen Veränderlichen z.

§ 5. **Der Differentialquotient der Functionen einer complexen Veränderlichen.** Der Ausdruck

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{w(z+dz) - w(z)}{dz} = \frac{w(x+dx, y+dy) - w(x,y)}{dx + i dy} = w'(x,y) = w'(z),$$

worin das Differentialzeichen d einen Grenzübergang andeutet, wird dann der Differentialquotient von $w(z)$ genommen nach z schlechthin heissen können, wenn $w'(z)$ **einen bestimmten** Werth besitzt. Zunächst ist ja nicht abzusehen, warum der Grenzwerth, wenn er vorhanden ist, von dem Verhältniss $dy:dx$ unabhängig sein sollte. Dies ist aber wirklich der Fall. Da w ein vollständiges Differential besitzen soll, so heisst das, dass man in der Gleichung

$$w(x+\alpha\delta, y+\beta\delta) - w(x,y) = \delta\left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\alpha + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\beta\right) + \eta\delta$$

δ für alle α, β, welche die Bedingung befriedigen $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 1$, und unabhängig von der Wahl dieser Grössen so klein nehmen könne, dass η unter jeden beliebigen Grad von Kleinheit dem absoluten Betrage nach herabsinkt.*) Weiter ist $\partial w : \partial y = i \partial w : \partial x = i w'(x,y)$ und mithin $w(x+\alpha\delta, y+\beta\delta) - w(x,y) = w'(x,y)(\alpha+\beta i)\delta + \eta\delta$, und wenn man $\alpha\delta = dx$, $\beta\delta = dy$, $\eta(\alpha+\beta i)$ für η setzt,

$$\frac{w(x+dx, y+dy) - w'(x,y)}{dx + i dy} = w'(x,y) + \eta, \quad \frac{dw(x,y)}{dx + i dy} = \frac{dw(z)}{dz} = w'(x,y) = w'(z).$$

Es ist also unter den gemachten Voraussetzungen der Grenzwerth, der Differentialquotient da wo die Function w regulär ist, in der That eine von dem Verhältniss $dx:dy$ von der **Differentiationsrichtung** unabhängige Grösse, wir können von einem Differentialquotienten der Function $w(z)$ reden und bezeichnen ihn mit $w'(z)$ oder $dw(z):dz$. Er existirt bis in jede beliebige Nähe einer irregulären Stelle und ist auch eine Function von z, ob aber in dem Sinne, in welchem wir eine Function der complexen Veränderlichen definirt haben, steht vorläufig noch dahin

Ist $u(x,y)$ der reelle, $iv(x,y)$ der imaginäre Theil von w, $w(x,y) = u + vi$, so lässt sich die complexe Gleichung $i\partial w : \partial x = \partial w : \partial y$ in die beiden Gleichungen zwischen reellen Grössen auflösen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = +\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

und aus ihnen fliessen durch nochmalige Differentation nach x und y, wenn diese möglich ist, was, wie sich später zeigt, im Allgemeinen stattfindet, die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Der Umstand, dass diese selbe Differentialgleichung in der Lehre vom Potential, der Wärmetheorie und auch der Elasticität vorkommt, bewirkt, dass die Theorie der complexen Functionen für

*) Vergl. meine Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. Halle 1875. S. 31

die Lösung von Aufgaben in diesen Gebieten wesentliche Dienste zu leisten im Stande ist. Die Kartographie zieht ebenfalls Nutzen aus derselben, weil die winkeltreuen Karten für die besten gehalten werden und die Bedingung der Winkeltreue wieder auf obige Differentialgleichung führt. Doch soll dies letztere sogleich näher besprochen werden.

§ 6. Winkeltreue. So wie wir die complexen Zahlen $z = x + yi$ in einer Ebene dargestellt haben, so wollen wir auch die zugehörigen Werthe einer Function $w = u + vi$ der complexen Veränderlichen z in einer Ebene, der w-Ebene, darstellen. Einer continuirlichen Werthfolge der z, einer Curve in der z-Ebene muss dann, so lange w regulär ist, wegen der Stetigkeit eine continuirliche Werthfolge der w, eine Curve in der w-Ebene entsprechen. Man muss dabei sogleich den Umstand berücksichtigen, dass einer knotenlosen Linie in der z-Ebene sehr wohl eine Linie mit Knoten- oder Doppelpunkten in der w-Ebene entsprechen darf, weil w denselben Werth für verschiedene Werthe von z annehmen kann. Ist z. B. $w = z^2$, so bedecken die Werthe, welche w annimmt, wenn z auf die Zahlen der Halbebene mit positiv reellem Theil beschränkt wird, die w-Ebene vollständig. Die Werthe, welche der andern Halbebene der z entsprechen, bedecken die w-Ebene zum zweiten Male. Zeichnet man daher in der z-Ebene eine knotenlose Linie, welche durch die Punkte $+1$ und -1 hindurch geht, so entspricht ihr in der w-Ebene eine Linie, die im Punkte $w = 1$ einen Knoten hat; ist jene Linie in der z-Ebene der Einheitskreis, so entspricht ihr in der w-Ebene der Einheitskreis doppelt, so dass gewissermassen jeder Punkt ein Doppelpunkt ist. Indessen ist es nicht zweifelhaft, welchem Zweige in einem Knotenpunkt der w-Ebene ein bestimmter Werth von z zukommt, wenn, wie vorausgesetzt, w in dem betrachteten Gebiete der z-Ebene eindeutig ist, und die folgenden Sätze erleiden in solchen Punkten keine Modification, wenn eben der richtige Zweig im Knoten gewählt wird.

Das Gebiet, in dem z regulär ist, sei T. Zieht man im Innern von T von einem Punkte z aus nach den benachbarten Punkten $z + \zeta_1$ und $z + \zeta_2$ gerade Linien, g_1, g_2, und ist $w(z + \zeta_1) = w + w_1$, $w(z + \zeta_2) = w + w_2$, so ist zunächst der Winkel, den die Geraden einschliessen, $arc(\zeta_2 : \zeta_1)$. Diesen Geraden entsprechen in der w-Ebene Curven, an welchen die Geraden $\gamma_1\, \gamma_2$, die bez. durch $w, w + w_1$ und $w, w + w_2$ gehen, Secanten sind. Nähern sich $\zeta_1\, \zeta_2$ der Null so, dass $z + \zeta_1$, $z + \zeta_2$ auf $g_1\, g_2$ bleiben, so ändern sich $\gamma_1\, \gamma_2$ stetig und gehen in die Tangenten an jene Curven über. Der Winkel, den zwei Curven an einer Schnittstelle bilden, wird aber durch den Winkel der Tangenten gemessen, und dieser ist der Grenzwerth von $arc(w_2 : w_1)$. Nun ist

$$arc(w_2 : w_1) = arc((w(z + \zeta_2) - w(z)) : (w(z + \zeta_1) - w(z))) = arc((w'(z)\zeta_2 + \varepsilon_2\zeta_2) : (w'(z)\zeta_1 + \varepsilon_1\zeta_1)),$$

wo $\varepsilon_1\, \varepsilon_2$ mit abnehmenden $\zeta_1\, \zeta_2$ gegen Null convergiren. Wenn daher $w'(z)$ nicht Null ist, so ist

$$arc\frac{w_2}{w_1} = arc\frac{\zeta_2}{\zeta_1} + arc\frac{w'(z) + \varepsilon_2}{w'(z) + \varepsilon_1} = arc\frac{\zeta_2}{\zeta_1} + arc\left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{w'(z) + \varepsilon_1}\right).$$

Der letzte arcus ist um so weniger von Null verschieden, je mehr sich sein Argument der Eins nähert, und aus diesem Grunde ist $\quad lim\, arc(w_2 : w_1) = arc(\zeta_2 : \zeta_1).$

Ist also $w(z) = u + vi$ in einem Gebiete T der z-Ebene eine reguläre Function von z, so wird T durch graphische Darstellung des Werthes w auf der w-Ebene so abgebildet, dass der Winkel, unter dem sich zwei Curven in T in einem Punkte z schneiden, derselbe ist als der, unter welchem sich die entsprechenden Curven treffen, wofern nur $w'(z)$ im Schnittpunkte nicht Null ist.

Aus diesem Grunde wird die Abbildung am treffendsten eine winkeltreue genannt, obschon auch noch die Namen conforme oder in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung im Gebrauch sind. Da w in T regulär angenommen wurde, so wird, wenn diese Voraussetzung fallen gelassen wird, die Winkeltreue nicht bloss in den Punkten $w'(z) = 0$ aufgehoben sein können, sondern auch in allen singulären Punkten der Function w. Die gefundene Beziehung lässt noch erkennen, dass die Aehnlichkeit sehr kleiner Dreiecke, die aus der Gleichheit der Winkel von selbst folgt, eine directe ist. Das heisst, liegen im Original die Ecken $m_1\, m_2\, m_3$ so, dass ein Umlauf um das Dreieck in der Richtung $m_1\, m_2\, m_3$ ein positiver ist, oder, was dasselbe ist, dass das Dreieck bei einem solchen Umlauf zur Linken liegt, und in jeder Ecke eine positive, der Bewegung des Zeigers einer Uhr entgegengesetzte

Drehung gemacht wird, so haben die Ecken $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$ des Bilddreiecks dieselbe Eigenschaft. Die Eigenthümlichkeit, dass einer positiven Drehung immer eine positive entspricht, kann bei Untersuchungen über das Entsprechen von Gebieten oft mit Erfolg benutzt werden.

Der Ausdruck $abs\,w'(z)$ giebt die lineare, und also der Ausdruck $w'(x+yi)\,.\,w'(x-yi)$ die Flächenvergrösserung des Bildes gegen das Original an. Da die lineare Vergrösserung von der Richtung unabhängig und nur durch den Ort bedingt ist, so kann man sie die locale Vergrösserung nennen. Es ist nämlich

$$abs\,(w\,(z+\zeta)-w\,(z)) = abs\,\zeta\,(w'(z)+\eta) = abs\,\zeta\,.\,abs\,w'(z)\,abs\,(1+\eta:w'(z));$$

ist $w'(z)$ von Null verschieden, und $w(z)$ regulär, so geht mit abnehmendem ζ die Grösse $\eta:w'(z)$ zur Grenze Null über, und wir erhalten

$$lim\,abs\,(w\,(z+\zeta)-w\,(z)):abs\,\zeta = abs\,w'(z),$$

unabhängig von der Richtung der Linie $z\,..\,z+\zeta$.

§ 7. Die Substitution. Der Nachweis, dass eine Summe, ein Produkt und, wo der Nenner nicht verschwindet, der Quotient regulärer Functionen wieder eine reguläre Function ist, darf wegen seiner Leichtigkeit unterdrückt werden; der Fall einer Function einer Function aber soll näher untersucht werden. Ist $w = u+vi$ eine Function der complexen Veränderlichen z in einem Gebiete T, und lässt sich um den Punkt $z = z_0$ in T herum eine Umgebung, ein Gebiet T_1 bestimmen, in welchem w regulär ist und jeden Werth, den es annimmt, nur einmal annimmt, so dass das Bild von T_1 in der w-Ebene ein Gebiet W_1 um den Punkt $w(z_0) = w_0$ herum nur einfach bedeckt, und ist $Z(w) = X+Yi$ eine reguläre Function von w in W_1, so ist auch Z in T_1 eine reguläre Function von z. Geometrisch besitzt der Satz eine besonders einfache Deutung. Bildet nämlich die Beziehung $w = w(z)$ das Gebiet T_1 winkeltreu auf W_1 ab, und bildet die Beziehung $Z = Z(w)$ das Gebiet W_1 winkeltreu auf ein Gebiet S_1 ab, so ist S_1 auch eine winkeltreue Abbildung von T_1.

Die Function w besitzt überall in T_1 einen Differentialquotienten, so dass $w(z+h) = w(z) + h(w'(z)+\varepsilon)$ gesetzt werden darf, wo ε mit der complexen Zahl h unabhängig vom arcus derselben verschwindet. Da aber auch Z in W_1 einen Differentialquotienten nach w besitzt, so ist $Z(w+w_1) = Z(w)+w_1(Z'(w)+\eta)$, wo η mit w_1 verschwindet. Folglich ist, wenn $w_1 = h(w'(z)+\varepsilon)$ gesetzt wird,

$$lim\,\frac{Z(w(z+h))-Z(w(z))}{h} = \frac{dZ}{dz} = lim\,w_1(Z'(w)+\eta):h = lim\,(w'(z)Z'(w)+\varepsilon Z'+\eta w'+\varepsilon\eta) = w'(z)Z'(w);$$

es besitzt also Z als Function von z einen von der Richtung unabhängigen Differentialquotienten, oder: *eine reguläre Function einer complexen Veränderlichen, die eine reguläre Function einer andern complexen Veränderlichen ist, ist selbst eine Function der letzteren complexen Veränderlichen.* Die Gebietsbeschränkungen, die dieser Satz fordert, sind im Obigen hinreichend gekennzeichnet.

In vielen Fällen ist es nützlich, eine Function Z der complexen Veränderlichen w nicht direct zu untersuchen, sondern für w eine Substitution zu machen, w als Function einer neuen Veränderlichen z anzusehen und durch sie auszudrücken. Es ist dann Z eine Function von z. Die einfachsten Substitutionen sind die linearen, und wie in der Geometrie, so beanspruchen sie auch in der Analysis eine besondere Beachtung.

§ 8. Die lineare Substitution. Ersetzt man in irgend einer Untersuchung, die complexe Zahlen z betrifft, diese durch Zahlen z', die mit ihr durch die Gleichung verbunden sind:

$$z = (az'+b):(cz'+d),\quad z' = (-dz+b):(cz-a),\quad czz'-az'+dz-b = 0,$$

so nennt man diesen Process eine lineare Substitution. Ersetzt man wieder z' durch $(a'z''+b'):(c'z''+d')$, so fliesst daraus $z = (a''z''+b''):(c''z''+d'')$, worin $a'' = aa'+bc'$, $b'' = ab'+bd'$, $c'' = ca'+dc'$, $d'' = cb'+dd'$ ist, und es besteht also zwischen z und z'' wieder eine lineare Beziehung, welche eine lineare Substitution constituirt, die man die zusammengesetzte der beiden gegebenen nennt. Die Grösse $ad-bc$ wird die Determinante der Substitution genannt. Da also immer wieder eine lineare

Substitution erhalten wird, wenn man beliebig viele solcher Substitutionen zusammensetzt, so sagt man: die linearen Substitutionen bilden eine Gruppe. Sind $abcd$, $a'b'c'd'$, ... reell, so sind auch die zusammengesetzten Substitutionen reell, die reellen Substitutionen bilden also auch für sich eine Gruppe.*) Jede lineare Substitution aber kann aus drei speciellen, den Grundsubstitutionen

$$z = \zeta - e, \quad z = f.\zeta, \quad z = 1:\zeta$$

zusammengesetzt werden, und es wird demnach eine Untersuchung dieser speciellen Substitutionen ein genügendes Licht über die allgemeinen Substitutionen verbreiten. Setzt man nämlich

$$z = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = \frac{a(c\zeta + d) - (ad - bc)}{c(c\zeta + d)} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(c\zeta + d)},$$

so ergiebt sich, dass man zu dieser Substitution gelangen kann durch Zusammensetzung der Substitutionen

$$z = z' + \frac{a}{c}, \quad z' = -\frac{ad - bc}{c^2} z'', \quad z'' = \frac{1}{z'''}, \quad z''' = \zeta + \frac{d}{c}.$$

Sind $z_1\ z_2\ z_3\ z_4$ vier verschiedene Zahlen oder Punkte, denen vermöge der Beziehung $z = (a\zeta + b) : (c\zeta + d)$ die vier Zahlen oder Punkte $\zeta_1\ \zeta_2\ \zeta_3\ \zeta_4$ entsprechen, und nennt man den Ausdruck

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_4}$$

das Doppelverhältniss dieser vier Zahlen oder vier Punkte, so ändert dasselbe, wie unmittelbar ersichtlich, seinen Werth nicht, wenn man die Zahlen $z_1\ z_2\ z_3\ z_4$ durch $\zeta_1\ \zeta_2\ \zeta_3\ \zeta_4$ ersetzt, wenn ζ zunächst mit z durch eine der drei Grundsubstitutionen verbunden wird, und mithin auch nicht, wenn ζ mit z durch die allgemeinste Beziehung verknüpft ist; es ist also

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$$

der linearen Substitution gegenüber eine Invariante.

Die einfachste geometrische Deutung besitzt die Substitution $z = \zeta - e$. Denkt man sich die ζ-Ebene so auf die z-Ebene gelegt, dass die Coordinatenkreuze zusammenfallen, und ist $e = \gamma + \delta i$, so entspricht einem Punkte x, y der z-Ebene ein Punkt der ζ-Ebene mit den Coordinaten $x - \gamma$, $y - \delta$, also ein Punkt, der aus der Ursprungslage in die neue durch zwei den Coordinatenaxen parallele Verschiebungen gebracht werden kann. Jeder Figur in der z-Ebene entspricht eine Figur in der ζ-Ebene, die durch eine parallele, für alle Theile der Figur gleiche Verschiebung aus der Ursprungslage erhalten wird, die ihr also vollkommen congruent ist, und in der zugleich entsprechende Richtungen gleich sind. Rechnet man hier (was noch weiter motivirt wird) die geraden Linien zu den Kreisen, so entspricht jedem Kreise ein Kreis.

Fast eben so einfach ist die Deutung der Substitution $z = f.\zeta$, wo $f = \lambda(\cos\mu + i \sin\mu)$ sein mag. Legen wir, wie vorhin, die ζ-Ebene auf die z-Ebene, so wird der Radiusvector eines Punktes der ζ-Ebene erhalten, wenn man den Radiusvector des entsprechenden Punktes der z-Ebene mit $abs\, f = \lambda$ dividirt. Der Winkel aber, den a mit der Achse des Reellen bildet, wird erhalten, wenn man den entsprechenden der z-Ebene um den zu $arc\, f = \mu$ gehörenden Winkel t vermehrt. Bild und Original sind einander ähnlich, zwar nicht ähnlich gelegen, sondern, wenn man das Original erst mit dem Coordinatenanfang als Aehnlichkeitspunkt und dem Vergrösserungsfactor $1 : \lambda$ ähnlich und ähnlich liegend abbildet, so gelegen, dass noch eine Drehung um den Aehnlichkeitspunkt um den Winkel t nöthig ist, um die Lage der Bildfigur zu erhalten. Auch hier entspricht ein Kreis einem Kreise.

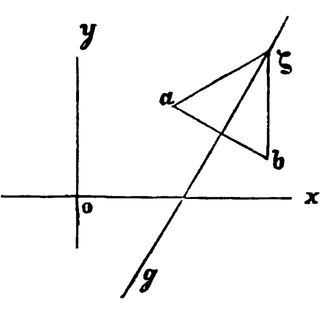
Eine etwas complicirtere geometrische Deutung findet die Substitution $z = 1:\zeta$, sie führt auf die sogenannte Abbildung durch reciproke Radii vectores oder die geometrische Kreisverwandtschaft. Man lege wieder die z- und ζ-Ebene mit den Coordinatenkreuzen auf einander. Durchläuft z den Einheitskreis, so durchläuft ihn auch ζ in entgegengesetzter Richtung; die Punkte ± 1 entsprechen sich selbst und heissen deshalb Doppelpunkte. Alle Punkte z ausserhalb dieses Kreises werden auf Punkte ζ innerhalb desselben Kreises abgebildet, und einer Geraden durch den Coordinatenanfang

*) Hier kann nur Weniges über diesen Gegenstand vorgebracht werden, man lese deshalb die interessanten Untersuchungen von Poincaré in den Acta mathem. Bd. I p. 7 nach.

entspricht eine auch durch den Coordinatenanfang gehende Gerade, die zur ersten in Bezug auf die Achse des Reellen symmetrisch liegt. Eine andere Gerade der z-Ebene habe die Gleichung $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Die entsprechende Curve der ζ-Ebene erhält man durch die Substitutionen $x = \xi : (\xi^2 + \eta^2)$, $y = -\eta : (\xi^2 + \eta^2)$, so dass sich ergiebt: $p(\xi^2 + \eta^2) - \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha = 0$. Dies ist ein Kreis durch den Coordinatenanfang, dessen Mittelpunkt die Coordinaten hat $\cos\alpha : p, -\sin\alpha : p$, und dessen Durchmesser der reciproke Werth von p, der Entfernung des Punktes Null von der Geraden ist. Zwei gerade Linien der z-Ebene schneiden sich unter demselben Winkel als die entsprechenden Kreise der ζ-Ebene. Die Halbebene, welche auf der den Coordinatenanfang enthaltenden Seite der Geraden g liegt, entspricht dem Aeusseren des Bildkreises, die andere Seite dem Innern. Ein Kreis der z-Ebene habe die Gleichung $x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + p = 0$, so hat die entsprechende Curve der ζ-Ebene die Gleichung $(\xi^2 + \eta^2)p - 2x_0\xi + 2y_0\eta + 1 = 0$. Ist $p = 0$, so ist dies eine Gerade, ist p nicht Null, ein Kreis. Also einem Kreise durch den Coordinatenanfang entspricht eine Gerade, einem andern Kreise ein Kreis. Rechnen wir die Geraden zu den Kreisen, so haben wir auch hier wieder den Satz, dass **einem Kreise ein Kreis entspricht.**

Die Figur des Kreises ist demnach auch der allgemeinen linearen Substitution $z = (a\zeta + b) : (c\zeta + d)$ gegenüber eine Invariante.

Man löst leicht die Aufgabe: Eine durch eine gerade Linie begrenzte Halbebene auf das Innere eines beliebigen Kreises conform so abzubilden, dass dem Mittelpunkte des Kreises ein beliebiger (nicht auf der Begrenzung liegender) Punkt der Halbebene entspricht.



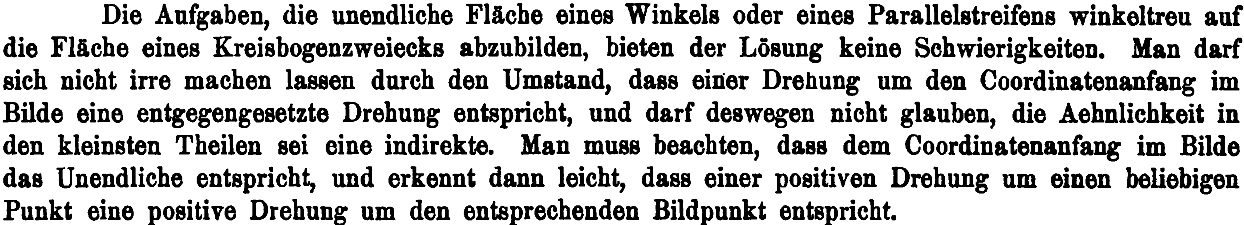
Sind nämlich a, b, c complexe Zahlen und setzt man $z = c(\zeta - b) : (\zeta - a)$ und lässt ζ diejenige Gerade g durchlaufen, welche auf der Geraden ab senkrecht steht und sie halbirt, so ist

$$abs(\zeta - b) : (\zeta - a) = 1,$$

weil die Strecke $a\zeta$ der absolute Betrag des Zählers und ζb der des Nenners ist, also ist

$$abs\, z = abs\, c \,.\, abs(\zeta - b) : (\zeta - a) = abs\, c,$$

mithin durchläuft z einen um den Anfang der Coordinaten mit dem Radius $abs\, c$ geschlagenen Kreis. Dem Punkte $\zeta = b$ entspricht der Mittelpunkt ($z = 0$) und den mit b auf derselben Seite der Geraden g gelegenen Punkten entsprechen die Punkte im Innern des Kreises. Durchläuft ζ die Gerade g, ohne umzukehren, so durchläuft z die Kreislinie, ohne umzukehren.



Die Aufgaben, die unendliche Fläche eines Winkels oder eines Parallelstreifens winkeltreu auf die Fläche eines Kreisbogenzweiecks abzubilden, bieten der Lösung keine Schwierigkeiten. Man darf sich nicht irre machen lassen durch den Umstand, dass einer Drehung um den Coordinatenanfang im Bilde eine entgegengesetzte Drehung entspricht, und darf deswegen nicht glauben, die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen sei eine indirekte. Man muss beachten, dass dem Coordinatenanfang im Bilde das Unendliche entspricht, und erkennt dann leicht, dass einer positiven Drehung um einen beliebigen Punkt eine positive Drehung um den entsprechenden Bildpunkt entspricht.

Liegen vier Punkte auf einem Kreise, so ist ihr Doppelverhältniss reell. Denn nimmt man einen Punkt e dieses Kreises zum **Abbildungspol**, ich meine, setzt man $\zeta = (az + b) : c(z - e)$, so bildet sich dieser Kreis auf eine Gerade ab, und es lässt sich dann $a : c$ noch so wählen, dass diese durch den Coordinatenanfang geht. Die den vier Zahlen $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ entsprechenden haben dann alle denselben arcus, und das Doppelverhältniss derselben, das ja dem von $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ gleich ist, hat einen reellen Werth. Der Satz ist umkehrbar.

Die Abbildung durch die Substitution $z = 1 : \zeta$ lässt nun die folgende geometrische Deutung zu. Legen wir durch den Aequator einer Kugel eine Ebene, deren obere dem Nordpol zugewandte Seite Träger der Zahlen $z = x + yi$ ist. Die positive y-Achse wird, vom Nordpol aus gesehen, durch eine positive (der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzte) Drehung aus der positiven x-Achse auf kürzestem Wege erhalten. Die untere Seite sei Träger der Zahlen ζ, sie wird vom Südpol aus

betrachtet. Die reelle Achse der ζ-Ebene fällt der Lage und dem Sinne nach mit der reellen Achse der z-Ebene zusammen, die Achse des Imaginären aber nur der Lage nach. Ihr positiver Theil in der ζ-Ebene fällt auf den negativen der z-Ebene, damit auch sie durch positive Drehung (vom Südpol gesehen) aus der reellen Achse erhalten werde. Projicirt man nun vom Nordpol aus den Punkt z der z-Ebene auf die Kugel, so erhält man einen Punkt, dessen geographische Länge l und Polhöhe p durch die Gleichungen bestimmt sind

$$x = tg(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}p)\cos l, \quad y = tg(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}p)\sin l, \quad z = tg(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}p)e^{il},$$

und projicirt man wieder diesen Punkt vom Südpol aus in die ζ-Ebene, so wird die Beziehung zwischen z und ζ genau durch die Gleichung $z = 1:\zeta$ vermittelt.

§ 9. Das Unendliche. Der Begriff des Unendlichen ist im Grunde immer als ein Process, als die Forderung eines Grenzüberganges aufzufassen. Aber die Geometrie sowohl als auch die Analysis hat das Bedürfniss, dafür ein Symbol zu besitzen, durch dessen Anwendung man davon entbunden wird, allgemein giltigen Sätzen immer einen besonderen Fall anzufügen, welcher jenem Grenzübergang entspricht. Es ist bekannt, dass man in der Geometrie durch lineare Substitution, durch Collineation das Unendliche auf die Punkte einer Geraden beziehen kann, und dass man deshalb mit ausgezeichnetem Erfolg den Sprachgebrauch eingeführt hat, die unendlich fernen Punkte einer Ebene liegen in einer Geraden, der unendlich fernen Geraden. Sucht man für die complexen Zahlen ebenfalls einen Ausgangspunkt für die Terminologie in den linearen Substitutionen, so gelangt man in der Analysis zu einer andern Vorstellung als in der Geometrie. Setzt man $z = 1:(\zeta - e)$, $\zeta = (1 + ez):z$, so mag nun z in einer Richtung oder mit einem Verhältniss von $x:y$ über alle Grenzen wachsen, wie es immer will, es nähert sich ζ dem einen Punkte, der einen Zahl e. Hierauf beruht der Sprachgebrauch, dass man in der Zahlenebene nur von einem unendlich fernen Punkte spricht, dass man die Ebene, wie man sich auch ausdrückt, in der Functionentheorie als eine unendlich grosse Kugel, also als eine geschlossene Fläche ansieht. In einer solchen Fläche ist auch jede Gerade als ein Kreis anzusehen, mit unendlich grossem Radius, wie wir im vorigen Paragraph schon festsetzten. Versteht man unter einem positiven Umgang um einen Punkt einen solchen Umlauf um die Begrenzung eines den Punkt enthaltenden Gebietes, bei dem das Gebiet zur Linken bleibt, *so bildet ein positiver Umgang um den unendlich fernen Punkt einen negativen um jeden im Endlichen liegenden Punkt.*

Eine Function von z heisst im unendlich fernen Punkte der z-Ebene regulär, wenn sie durch die Substitution $z = 1:\zeta - e$ in eine reguläre Function der Variabeln ζ im Punkte e übergeht, und lässt sie sich durch eine Potenzreihe der Form darstellen

$$A_{-n}(z-a)^n + A_{-n+1}(z-a)^{n-1} + \ldots A_{-1}(z-a) + A_0 + \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots,$$

so mögen die Zahlen $A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, \ldots$ die Residuen der Function im Punkte Unendlich heissen, und wenn A_{-n} nicht Null ist, so mag die Function im Unendlichen einen n-fachen Pol besitzen. Sind die Residuen Null, so ist die Function im Unendlichen regulär.

Unter der Annahme, dass dem Process, über alle Grenzen zu wachsen, nur ein Symbol zugewiesen werde, welches nur einer Zahl äquivalent ist, lassen sich die Punkte einer Ebene und die Zahlen z nicht völlig ein-eindeutig auf einander beziehen, denn der linearen Mannigfaltigkeit der unendlich fernen Punkte der Ebene entspricht nur eine Zahl; wohl aber ist dieses mit den Punkten einer Kugel möglich. Eine Fläche, auf welche sich die Zahlen ein-eindeutig beziehen lassen sollen, muss demnach unbegrenzt, geschlossen sein und muss, wie die Kugel, einfach zusammenhängend sein.

§ 10. Das Integral. Die Bekanntschaft mit dem genauen Begriff des gewöhnlichen Integrales und des Doppelintegrales, in welchem die Veränderlichen reell sind, muss hier unerlässlich vorausgesetzt werden. Es werde nur an die bekannten Sätze der Integralrechnung erinnert, dass das Integral zwischen zwei bestimmten Grenzen nicht bloss dann ausgeführt werden kann und einen endlichen Werth liefert, wenn der Integrand endlich und stetig ist, sondern auch dann noch, wenn der Integrand zwischen

diesen Grenzen an einzelnen Stellen unstetig oder wenn er unendlich wird, wofern nur die Ordnung des Unendlichwerdens um ein Angebbares niedriger als die erste ist. Bis ins Unendliche darf aber das Integral erstreckt werden, wenn mit der wachsenden Veränderlichen die Funktion unendlich klein in einer Ordnung wird, die die erste um ein Angebbares übersteigt, also z. B. wie $x^{-\frac{3}{2}}$, $x^{-1-\varepsilon}$, wo ε einen positiven reellen Theil besitzt. Das Doppelintegral aber darf über Gebiete erstreckt werden nicht bloss dann, wenn die Function in ihnen überall stetig ist, sondern sie darf auch in einzelnen Punkten, selbst in einzelnen Linien unstetig werden. Wird aber der Integrand in einzelnen Punkten unendlich gross, so ist die Integration unbedenklich, wenn die Ordnung des Unendlichwerdens, gemessen durch die Entfernung von dem betreffenden Punkte, um ein Angebbares niedriger ist, als die zweite. Damit ist nicht ausgeschlossen, dass sich die Function bei Annäherung der Veränderlichen an eine Unstetigkeitsstelle in verschiedener Richtung verschieden verhält, wenn sie eben nur noch multiplicirt mit einer Potenz der Entfernung r von dem Punkte, die um ein bestimmtes kleiner als zwei ist, bei jeder Annährungsrichtung verschwindet. Ueber ein unendlich grosses Gebiet darf das Integral erstreckt werden, wenn der Integrand im Unendlichen in einer durch eine positive Zahl messbaren Ordnung verschwindet.

Die eben angegebenen Integrationsbedingungen sind zwar hinreichende, aber nicht durchaus nothwendige, sondern es darf von ihnen Erhebliches nachgelassen werden. (Vergl. z. B. meine „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. Halle 1875. S. 24.“) Allein für die Anwendungen, die hier von diesen Sätzen gemacht werden, liegt ein Bedürfniss, subtilere Fälle in Betracht zu ziehen, nicht vor. Eine Function, die den angegebenen Bedingungen genügt, soll eine integrabele Function heissen.

Enthält ein Gebiet einen Punkt, insbesondere einen singulären Punkt, einen Pol, oder auch eine singuläre Linie im Innern, nicht am Rande, aber ausser der bezeichneten singulären Stelle keine andere Singularität weder im Innern noch am Rande, so pflegt man dies Gebiet eine Umgebung dieser Stelle zu nennen. Es macht sich aber häufig auch noch die Bezeichnung des Randes einer solchen Umgebung nöthig. Wir kommen überein, die Begrenzung der Umgebung eines Punktes oder einer Linie eine Berandung dieser Stelle zu nennen.

§ 11. Das Integral mit einer complexen Veränderlichen. Ist eine complexe Function zu integriren, so heisst das weiter nichts, als dass sowohl ihr reeller als auch der mit i multiplicirte Theil für sich zu integriren sind, und dass aus den Integralen die complexe Summe zu bilden ist. Dies giebt keinen wesentlichen Unterschied von einem gewöhnlichen Integrale. Anders verhält es sich, wenn der Veränderlichen selbst complexe Werthe oder, wie man sagt, Wege vorgeschrieben werden.

Ist $w(z)$ in einem Gebiete T eine integrabele Function, und ziehen wir zwischen den Punkten $z_0\ z'$ dieses Gebietes eine in T verlaufende Curve l, die nur der Bedingung unterworfen sein soll, dass sie, ausgenommen in einzelnen Punkten, die Ecken sein können, eine Richtung besitzt und dieselbe stetig ändert, und bezeichnen wir die Länge dieser Curve von z_0 an bis zu einem beliebigen Punkte z auf ihr mit s, ihre Richtung an jener Stelle mit t, so dass der reelle und imaginäre Theil von z sowie auch t Functionen von s sind, weshalb wir $w(x(s)+iy(s))$ mit $w((s))$ kurz bezeichnen wollen, so definiren wir das über die Curve l erstreckte Integral durch ein gewöhnliches Integral mittels der Gleichung

$$\int_{(l)} w(z)\,dz = \int_0^{s'} w((s))\,(\cos t + i \sin t)\,ds.$$

Wird die Linie l durch die Punkte $z_0\ z_1\ z_2\ ..\ z_{n-1}\ z'$ in viele Theile getheilt, und ist z'_μ ein Punkt zwischen z_μ und $z_{\mu+1}$ die Grenzen eingeschlossen, so ist ersichtlich, dass dieses Integral den Grenzwerth der Summe bedeutet,

$$\int_{(l)} w(z)\,dz = \lim \sum_{(\mu)} w(z'_\mu)\,(z_{\mu+1} - z_\mu),$$

wenn die benachbarten Punkte der Reihe $z_0\ z_1\ z_2\ ..\ z_{n-1}\ z'$ unendlich nahe an einander rücken, und es machen sich bei dieser Definition durch den Grenzwerth einer Summe nur dann die bekannten Dirichlet'schen Modificationen nöthig, wenn $w(z)$ oder t auf l unstetig oder unendlich wird, oder wenn l sich ins Unendliche erstreckt. Da zur völligen Bestimmung des Integrales nicht bloss die Linie l gegeben

sein muss, sondern auch noch anzugeben ist, welches der Anfangs- und welches der Endpunkt sei, so schreibt man einem Integrale einen **Sinn** oder eine **Richtung** in der Curve vom Anfangs- zum Endpunkte zu. Verkehrt man den Sinn oder die Richtung, so geht $z_{\mu+1} - z_\mu$ in $z_\mu - z_{\mu+1}$ über; es bedarf daher der Satz nicht erst eines Beweises.

Das Integral $\int w(z)\,dz$ über eine Linie in einer Richtung erstreckt ist das Negative desselben Integrals über dieselbe Linie in entgegengesetzter Richtung erstreckt.

Es ist nicht nöthig, gerade die Länge s als die reelle Integrationsveränderliche einzuführen, sondern man wählt dafür mit Vortheil oft eine ihr proportionale Grösse oder eine andere Function von s. Betrachten wir z. B. die besonders häufig vorkommenden Integrationswege der geraden Linie und des Kreises, so ist im ersten Falle $z = x_0 + (x' - x_0)\lambda + i(y_0 + (y' - y_0)\lambda)$, und also das geradlinige Integral

$$\int\limits_{(l)} w(z)\,dz = \int\limits_{z_0}^{z'} w(z)\,dz = (z' - z_0)\int\limits_0^1 w(z_0 + \lambda(z' - z_0))\,d\lambda,$$

und es ist λ der Länge s proportional. — Ist der Integrationsweg ein Stück des Kreises, welcher mit dem Radius k um den Punkt a geschlagen ist, so ist t wieder s proportional, wenn man $z = a + re^{ti}$ setzt, und

$$\int\limits_{z_0}^{z'} w(z)\,dz = ri\int\limits_{t_0}^{t'} w(a + re^{ti})\,e^{ti}\,dt.$$

Die Schätzung des Werthes eines Integrales durch die Gleichung

$$\int\limits_{(l)} w(z)\,dz \gtreqless l \operatorname{abs} w(z)$$

bedarf nach der gegebenen Definition nicht eines besondern Nachweises der Richtigkeit.

§ 12. **Satz von Cauchy.** *Das Integral $\int w(z)\,dz$ einer Function $w(z)$, welche im Innern*) und am Rande eines ebenen Stückes S integrabel ist, über die ganze Begrenzung dieses Stückes erstreckt, hat den Werth Null.*

Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Function $w(z)$ besitze im Innern von S nur einen Punkt u, für welchen sie so unendlich oder unstetig wird, wie es dem Charakter einer integrabelen Function einer Veränderlichen gemäss ist, oder, um etwas allgemeiner zu sein, welche im Punkte u so unendlich wird, dass $w(z)(z-u)$ in ihm verschwindet, und nur eine Linie l, längs welcher sie zwar stetig ist, aber der Differentialgleichung für complexe Functionen nicht genügt, oder längs welcher die Differentialquotienten unstetige Functionen sind. Wir scheiden dann aus dem Stück S mittels einer Berandung dieser Stellen sehr kleine Flächenstücke aus und rechnen die äusseren Ufer der beiden Berandungen der Begrenzung s des übrigbleibenden Stückes S' mit der Gesammtbezeichnung s' hinzu. Setzen wir hierauf $X = -iw(z)$, $Y = w(z)$, so ist in S' überall die Differentialgleichung erfüllt

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

und demnach ist auch das über alle Elemente $dx \,.\, dy$ des Stückes S' (im ganz gewöhnlichen Sinne eines Flächenintegrals) erstreckte Doppelintegral

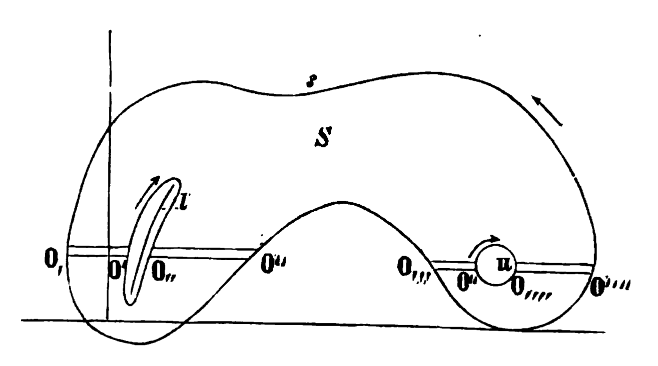
$$\iint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

Um das Integral $\iint \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy$ zu transformiren, zerlegen wir das Flächenstück S' durch ein System der x-Achse paralleler Linien in Elementarstreifen von der Breite dy. Der Beitrag eines unbestimmten dieser Flächenstreifen zu dem Werthe von $\iint \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy$ wird dann offenbar $dy \int \frac{\partial X}{\partial x}\,dx$,

---

*) Dem Innern wird hier immer nicht blos das Aeussere, sondern auch der Rand entgegengesetzt. Der hier gegebene Beweis des Cauchy'schen Satzes rührt von **Riemann** her.

wenn die Integration über eine der y-Achse parallele Gerade erstreckt wird, welche dem Flächenstreifen angehört. Tritt nun (in der Richtung der wachsenden x) diese Linie bei $0_,$ in die Fläche S' ein, bei $0'$ aus derselben heraus (in unserer Figur in das um l ausgeschiedene Stück ein), bei $0_{,,}$ wieder ein, bei $0''$ aus u. s. w. bei $0_{,,,}$, $0'''$, ..., und sind die Werthe von X dort bez. $X_,$, X', $X_{,,}$, X'', $X_{,,,}$, X''', ..., und bezeichnen wir mit $ds_,$, ds', $ds_{,,}$, ds'' etc. die Stücke der Begrenzung s', welche der betrachtete Elementarstreifen aus ihr herausschneidet, und die Winkel, welche diese mit der x-Achse bilden, mit $t_,$, t', $t_{,,}$, t'', ..., wobei s' immer in derjenigen, die positive genannten, Richtung zu nehmen ist, bei der das begrenzte Stück S' zur Linken bleibt, so liegen offenbar diese Winkel im dritten und vierten Quadranten bei $0_,$, $0_{,,}$, $0_{,,,}$, ..., im ersten und zweiten bei $0'$, $0''$, $0'''$, ..., so dass



$$dy = -\sin t_, ds_, = -\sin t_{,,} ds_{,,} = -\sin t_{,,,} ds_{,,,} = \ldots = \sin t' ds' = \sin t'' ds'' = \sin t''' ds''' = \ldots$$

ist. Ferner ist

$$\int \frac{\partial X}{\partial x} dx = X' + X'' + X''' + \ldots - X_, - X_{,,} - X_{,,,} - \ldots$$

und also

$$dy \int \frac{\partial X}{\partial x} dx = \sum X \sin t\, ds,$$

worin sich die Summation auf alle Begrenzungselemente bezieht, welche von dem betrachteten Elementarstreifen aus s' ausgeschnitten werden. Durch die Integration über sämmtliche Elementarstreifen wird nun das Integral $\int\int \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy$ erhalten, und die rechte Seite der erlangten Gleichung verwandelt sich in $\int X \sin t\, ds$, worin die Integration über die ganze Begrenzungslinie s' positiv zu erstrecken ist.

Durch ganz ähnliche Schlüsse findet man

$$\int\int \frac{\partial Y}{\partial y} dx\, dy = -\int Y \cos t\, ds,$$

und folglich

$$\int\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int (Y \cos t - X \sin t)\, ds = 0.$$

Und demnach endlich

$$\int (Y \cos t - X \sin t)\, ds = \int w(z)\,(\cos t + i \sin t)\, ds = \int w(z)\, dz = 0,$$

worin die Integration positiv über s', also über die ganze Begrenzung s von S, und in entgegengesetzter Richtung, also negativ, über die Berandungen von u und l zu erstrecken ist.

Ueber die Gestalt der Berandungen von u und l sind keine Bestimmungen getroffen. Der Werth des Integrals $\int w(z)\, dz$, genommen über die ganze Begrenzung s von S, welcher nach dem eben Bewiesenen gleich ist der Summe der Integrale über die Berandungen von u und l in derselben Richtung genommen, ändert sich nicht, wie wir auch diese Berandungen gestalten mögen.

Um das Integral über die Berandung von u auszuwerthen, wählen wir für dieselbe einen Kreis, dessen Radius r beliebig klein genommen werden kann. Setzen wir $z - u = r . e^{ti}$, so ist das Integral

$$\int w(z) dz = i \int_0^{2\pi} r . w(u + r e^{ti}) e^{ti} dt,$$

verschwindend klein, weil r beliebig klein genommen werden kann, und voraussetzungsmässig $r . w(u + r e^{ti})$ mit r verschwindet. Also ist das Integral über die Berandung von u kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse, also Null.

Ebenso ist das Integral über die Berandung der Linie l Null, weil diese Begrenzung beliebig nahe an die beiden Ufer von l gebracht werden kann, so dass die Integration über Linien, die den

beiden Ufern von l parallel sind, in entgegengesetzter Richtung zu erstrecken ist. Es liefern aber die beiden gegenüberliegenden parallelen Begrenzungsstücke einen Beitrag von beliebiger Kleinheit, weil voraussetzungsmässig $w(z)$ längs l stetig ist*), mithin $w(z)$ in gegenüberliegenden Punkten nur wenig verschieden, die Elemente dz aber von entgegengesetztem Zeichen sind. Also ist das Integral über die Begrenzung von S kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse, mithin Null, w. z. b. w.

Wenn ein Theil einer Linie l oder ein Punkt u auf die Begrenzung s von S selbst fällt, so sind nur geringe Modificationen des Beweises nöthig, es muss aber dann die Beschränkung gemacht werden, dass das Integral über diese Begrenzung ausführbar ist, was z. B. nicht der Fall ist, wenn die Function für $z = u$ wie $1:(z-u)\, lg\, abs(z-u)$ unendlich wird, obschon im Innern ein solches Unendlichwerden vorkommen dürfte.

Es ist nicht wesentlich, dass, wie dies in der Zeichnung statthat, S einfach zusammenhängend sei, und mithin s aus einem Stücke bestehe. Wesentlich ist, dass das Integral über die **ganze** Begrenzung zu nehmen ist, und dass das begrenzte Stück S bei der Integration über die etwaigen einzelnen Stücke von s immer zu derselben Seite der Integrationsrichtung liegt, und dass w auf s integrabel ist.

§ 13. **Unendliche Ebenenstücke.** Der Cauchy'sche Satz behält auch für solche Ebenenstücke S seine Giltigkeit, welche den unendlich fernen Punkt enthalten, wenn man eine Zahl M angeben kann, über welche der absolute Betrag von z nicht hinauszugehen braucht, damit $abs[w(z).z]$ kleiner als eine noch so kleine vorgegebene Zahl σ werde, was auch der arcus der Zahl z sei. Die Zahl M wird im Allgemeinen zunehmen, wenn σ abnimmt, aber es ist nöthig, dass zu jedem bestimmten σ ein bestimmtes M existirt.

In der That, die Begrenzung des Stückes S, welches den unendlich fernen Punkt im Innern enthält, sei s, so kann man einen Kreis k um den Anfangspunkt der Coordinaten mit einem so grossen Radius R schlagen, dass er die Begrenzung s ganz umschliesst, dass er also ganz im Innern von S liegt. Dann ist nach dem bewiesenen Cauchy'schen Satze das über die Begrenzung s erstreckte Integral $\int\limits_s w(z)\,dz$ gleich dem in derselben Richtung über k erstreckten Integrale $\int\limits_{(k)} w(z)\,dz$, also gleich

$$i\int\limits_0^{2\pi} w(Re^{ti})\,Re^{ti}dt,$$

weil s und der Kreis k die ganze Begrenzung eines Ebenenstückes S ausmachen, in dessen Innerem $w(z)$ den Bedingungen des Cauchy'schen Satzes genügt. Da nun aber der absolute Betrag von $w(Re^{ti})R$ also auch von $w(Re^{ti})Re^{ti}$ kleiner als σ gemacht werden kann für ein hinlänglich grosses R (welches für alle t dasselbe bleibt), so ist $abs\int\limits_{(k)} w(z)\,dz < \int\limits_0^{2\pi}\sigma\,dt = 2\pi\sigma$. Da also $\int\limits_{(s)} w(z)\,dz < 2\pi\sigma$, d. h. kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse ist, so ist $\int\limits_{(s)} w(z)\,dz = 0$; w. z. b. w.

---

*) Damit das Integral $\int w(z)\,dz$ über die Berandung σ von l erstreckt seinem absoluten Betrage nach jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen kann (während gleichzeitig für die Begrenzung σ noch die Differentialgleichung $i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$ besteht, was zur Anwendbarkeit des Cauchy'schen Satzes nothwendig ist), ist erforderlich, dass eine kleine Strecke δ angegeben werden kann, unter welche die Entfernung der Berandung von der Linie l nicht herabzusinken braucht (einzelne Punkte etwa ausgenommen), damit die Differenzen der Werthe der Function w für die Punkte auf σ und der Werthe für die nächstliegenden Punkte auf l ihrem absoluten Betrage nach überall kleiner als eine bestimmte beliebig kleine vorgegebene Zahl ε werden. Dies ist aber bei dem Begriffe der Stetigkeit, wie er in neuerer Zeit streng definirt wird, von selbst erfüllt. In der Annahme der Möglichkeit, eine Umgebung von l durch parallele Berandung beliebig klein zu machen, liegt eine gewisse Beschränkung der Linie l.

Die Annahme, dass $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ in dem Stücke S' stetig sein sollen, kann durch die weniger beschränkende ersetzt werden, dass diese Functionen die doppelte Integration $\int\int\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy$, $\int\int\frac{\partial w}{\partial y}\,dx\,dy$ in eindeutigem Sinne zulassen. Dies würde in der That eine weit geringere Beschränkung sein, weil es Functionen giebt, die in jedem noch so kleinen Flächengebiete unendlich oft unstetig sind und doch die Integration zulassen. Wir sehen jedoch von solchen Fällen aus schon mitgetheilten Gründen ab.

Liegt der unendlich ferne Punkt auf der Begrenzung selbst, so muss die Integrabilität der Function $w(z)$ bis an diese Stelle vorausgesetzt werden.

Befinden sich in dem Stücke S Pole, und ist in einem derselben, etwa in a, die Function $w(z)$ in der Form darstellbar

$$w(z) = \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-a} + f(z),$$

wo $f(z)$ in der Umgebung des Punktes a den Cauchy'schen Bedingungen genügt, so ist das Integral über eine Berandung des Poles, etwa über einen Kreis um a mit dem Radius r,

$$\int_{(r)} w(z)\,dz = i\frac{A_{-n}}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-(n-1)ti}\,dt + \ldots + i\frac{A_{-2}}{r}\int_0^{2\pi} e^{-ti}\,dt + iA_{-1}\int_0^{2\pi} dt + \int_{(r)} f(z)\,dz$$

gleich $2i\pi A_{-1}$, und *der Cauchy'sche Satz bleibt in Giltigkeit, wenn in den in S enthaltenen Polen jedesmal das erste Residuum Null ist. Ist der Pol der unendlich ferne Punkt, so muss das erste Residuum der Function $z^2(w)z$ in ihm verschwinden, wenn der Cauchy'sche Satz bestehen bleiben soll.*

Wenn im Folgenden von Functionen geredet wird, die den Bedingungen des Cauchy'schen Satzes, oder kürzer den Cauchy'schen Bedingungen genügen, so sollen damit Pole im Allgemeinen nicht zugelassen sein. Die hier angewandte Methode, den Cauchy'schen Satz zu erweisen, dient in ganz gleicher Weise dazu, das Integral eines sogenannten vollständigen Differentiales überhaupt zu bestimmen. (Vergl. z. B. meine „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale, S. 43".)

§ 14. Bestimmtheit des Integrales. Man folgert nun unmittelbar die Sätze:

Das Integral einer Function $w(z)$ der complexen Veränderlichen z über die ganze Begrenzung s eines Ebenenstückes S erstreckt ist gleich der Summe der Integrale der in derselben Richtung über die Berandungen der Unstetigkeitsstellen von $w(z)$ erstreckten Integrale.

Das Integral $\int w(z)dz$ über jede von zwei zwischen z_0 und z' verlaufenden Linien l', l'', welche ein einfach zusammenhängendes Stück S einschliessen, in dem $w(z)$ den Cauchy'schen Bedingungen genügt, liefert einen und denselben Werth.

Denn nach dem Cauchy'schen Satze ist das Integral von z_0 bis z' über l' vermehrt um das Integral von z' bis z_0 über l'' Null, weil l' und l'' zusammen die ganze Begrenzung von S ausmachen da S als einfach zusammenhängend vorausgesetzt wurde. Dieses letztere Integral ist aber negativ gleich dem Integral von z_0 bis z' über l'', woraus der zu beweisende Satz folgt.

Hingegen kann das Integral $\int w(z)dz$ zwischen zwei Punkten z_0 und z' in einem nicht einfach zusammenhängenden Flächenstück, wie z. B. in einem von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Stücke, auf verschiedenen Wegen sehr wohl verschiedene Werthe erhalten. Wenn nämlich die beiden Wege zusammen den innern Kreis völlig einschliessen, so ist die Differenz der Integrale über die beiden Wege keineswegs Null, sondern gleich dem Integrale über den innern oder auch den äussern Kreis, und wenn diese Integrale nicht Null sind, so sind die beiden Integrale zwischen z_0 und z' verschieden. In einem solchen Falle bildet $l' + l''$ nicht die alleinige Begrenzung eines Flächenstückes.

Dieser Satz bewirkt die Anwendbarkeit der Schreibweise $\int_{z_0}^{z'} w(z)dz$, in welcher von dem Integrationswege nicht die Rede ist. In der That hängt der Werth des Integrals von einem Wege l, der die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Stückes S nicht überschreitet, nicht ab, wenn $w(z)$ darin den Cauchy'schen Bedingungen genügt, weil dann alle Wege zwischen z_0 und z' nach dem eben ausgesprochenen Satze auf einen unter ihnen reducirt werden können, wenn man solche Wege aufeinander reducirbar nennt, die zusammen ein einfach zusammenhängendes Stück einschliessen. Die Angabe des Weges darf aber nicht unterlassen werden, wenn $w(z)$ irgendwo im Innern von S Pole besitzt, deren erste Residuen nicht verschwinden, oder wenn es innerhalb eines Stückes betrachtet wird, das nicht einfach zusammenhängend ist, in welchem daher nicht alle Wege zwischen zwei Punkten auf einen reducirbar sind. In diesem Falle kann jedoch das Stück durch Querschnitte, deren beide Ufer der Be-

grenzung hinzuzufügen sind, in ein einfach zusammenhängendes verwandelt werden, und so das Integral zu einem durch seine Grenzen allein wohlbestimmten gemacht werden. Dabei muss freilich vorläufig noch bemerkt werden, dass der Weg nicht über Punkte hinweg führen darf, in welchen $w(z)$ so unendlich wird, dass die Integration keinen Sinn hat. Später zeigt sich, dass solche Punkte wenigstens im Innern eines Stückes S überhaupt nicht vorkommen.

§ 15. *Das Integral* $\int_{z_0}^{z} w(z)\,dz$, *dessen obere und untere Grenze in einem einfach zusammenhängenden Stück S liegen, in dem* $w(z)$ *die Cauchy'schen Bedingungen befriedigt, ist in S eine reguläre Function der complexen Variabeln* z.

Bezeichnen wir das Integral mit $W(z)$, so ist $W(z)$ in S offenbar endlich und stetig, es genügt aber auch der Differentialgleichung $\frac{\partial W}{\partial x} = -i\frac{\partial W}{\partial y}$. Es ist nämlich

$$W(z+dx) - W(x) = \int_{z_0}^{z+dz} w(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} w(\zeta)\,d\zeta = \int_{z}^{z+dz} w(\zeta)\,d\zeta,$$

weil man für die Wegstrecke von z_0 bis z in den beiden Integralen, deren Differenz zu bilden ist, beidemal dieselbe wählen kann. Also ist $W(z+dx) - W(z) = dx\,w(z)$ nach der Definition des Integrals, und ebenso $W(z+idy) - W(z) = i\,dy\,w(z)$, folglich, ausgenommen vorläufig in einzelnen Punkten, in welchen $w(z)$ unendlich oder unstetig ist, $\frac{\partial W(z)}{\partial x} = -i\frac{\partial W(z)}{\partial y}$, w. z. b. w.

Man nimmt sehr häufig für die obere Grenze und die Integrationsvariabele einen und denselben Buchstaben.

§ 16. Der Logarithmus. *Das Integral* $\int dz:(z-\zeta)$ *über die Berandung des Punktes* ζ *in positiver Richtung erstreckt hat den Werth* $2\pi i$.

Nehmen wir als Berandung einen um den Punkt ζ mit dem Radius 1 geschlagenen Kreis an, so ist $abs(dz:(z-\zeta)) = ds$, wenn ds ein Linienelement der Kreisperipherie bedeutet, und da die Strecke von ζ nach z senkrecht steht auf der Strecke ds, so ist $arc(dz:(z-\zeta))$, die Differenz der arcus der Zahlen dz und $z-\zeta$, gleich $\frac{1}{2}\pi$, und daher $dz:(z-\zeta) = i\,ds$ und $\int dz:(z-\zeta) = i\int ds = 2i\pi$. Die Gestalt der Berandung ist aber nach dem Cauchy'schen Satze völlig willkürlich, und somit ist der Satz bewiesen.

Damit wir das Integral $\int_1^z (1:z)\,dz$ als Function der oberen Grenze z ansehen können, ziehen wir vom Punkte ∞ der z-Ebene eine Gerade q zum Punkte 0, deren beide Ufer wir als Begrenzung der Ebene ansehen — wir nehmen hierzu die negative x-Achse mit der Zugrichtung von $-\infty$ nach 0, so dass das obere Ufer q^+ als das positive, das untere q^-, welches bei Führung des Zuges zur Rechten liegt, als das negative anzusehen ist —, dann bildet diese ein einfach zusammenhängendes Stück S. Im Innern desselben genügt die Function $1:z$ den Bedingungen des Cauchy'schen Satzes, in ihm ist daher das Integral eine eindeutig bestimmte Function von z. Bezeichnen wir sie mit $lg\,z$, so ist

$$lg(\alpha.\beta) = \int_1^{\alpha.\beta} dz:z = \int_1^{\alpha} dz:z + \int_{\alpha}^{\alpha.\beta} d(\alpha z):\alpha z,$$

und wenn wir im letzten Integrale für αz die Variabele ζ einführen,

$$lg(\alpha.\beta) = \int_1^{\alpha} dz:z + \int_1^{\beta} d\zeta:\zeta = lg\,\alpha + lg\,\beta.$$

Aus der Gleichung $lg(\alpha\beta) = lg\,\alpha + lg\,\beta$ folgt die Uebereinstimmung unseres Integrals mit dem Logarithmus irgend einer constanten Basis. Da aber $lg\,z$ auf dem positiven Ufer von q um $2\pi i$ grösser ist, als auf dem negativen, so stellt das Integral den natürlichen Logarithmus dar. Die Function

$$-lg(1-z) = -\int_1^{1-z}\frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^z \frac{dz}{1-z}$$

lässt sich leicht in eine Reihe entwickeln. Es ist nämlich

$$\int_0^z \frac{dz}{1-z} = \sum_{1\,(n)}^{m} \frac{z^n}{n} + \int_0^z \frac{z^m}{1-z}\,dz.$$

Um nun das Integral $\int_0^z \frac{z^m\,dz}{1-z} = R_m$ zu untersuchen, integriren wir auf einer geraden Linie von 0 bis $z = re^{ti}$, worin t constant, dz demnach $= e^{ti}dr$ ist. Dann ist

$$R_m = e^{(m+1)ti} \int_0^r \frac{r^m\,dr}{1 - r\,(\cos t + i \sin t)}$$

$$= e^{(m+1)ti} \int_0^r \frac{r^m(1 - r\cos t)\,dr}{(1 - r\cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} + ie^{(m+1)ti} \sin t \int_0^r \frac{r^{m+1}\,dr}{(1 - r\cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}.$$

Nun ist r^m eine Function, die zwischen 0 und r ihre Zeichen nicht wechselt, folglich, wenn $\lambda, \mu \gtreqless 1$ sind,

$$R_m = \frac{e^{(m+1)ti}(1 - \lambda r\cos t)}{1 - 2\lambda r\cos t + \lambda^2 r^2} \cdot \int_0^r r^m\,dr + \frac{ie^{(m+1)ti}\mu r \sin t}{1 - 2\mu r\cos t + \mu^2 r^2} \int_0^r r^m\,dr$$

$$= \frac{e^{(m+1)ti} \cdot r^{m+1}}{m+1} \left(\frac{1 - \lambda r\cos t}{1 - 2\lambda r\cos t + \lambda^2 r^2} + \frac{i\mu r \sin t}{1 - 2\mu r\cos t + \mu^2 r^2} \right).$$

So lange $r < 1$ ist, nähert sich dieser Ausdruck stets, wenn aber $r = 1$ für alle t, ausser $t = 0$ oder 2π, der Null, wenn man m gross genug nimmt, bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit. Demnach stellt die Reihe $\lim_{m=\infty} \sum_{1\,(n)}^{m} \frac{z^n}{n}$ die Function $-\lg(1-z)$, so lange $abs\,z < 1$ ist, und für $z = e^{ti}$, so lange $t \gtrless 0, 2\pi$ ist, genau dar. Es ist indessen nicht unwichtig zu beachten, dass m grösser und grösser genommen werden muss, damit R_m kleiner als eine vorgegebene Grösse σ werde, wenn sich t dem Werthe 0 unaufhörlich nähert, während $abs(z) = 1$ ist. Dasselbe gilt auch für den imaginären Theil der Reihe für $\sum \frac{\sin nt}{n}$. Obgleich diese letztere Reihe für $t = 0$ und $t = 2\pi$ convergirt, so kann doch keine Zahl m angegeben werden, über welche man durchgehend für alle t nicht hinaus zu gehen brauchte, damit $\sum_1^\infty \frac{\sin nt}{n} - \sum_1^m \frac{\sin nt}{n} < \sigma$ sei. Solche Reihen können der Infinitesimalrechnung nicht ohne Weiteres unterworfen werden und heissen ungleichmässig convergente Reihen oder Reihen mit unendlich verzögerter Convergenz. Dies ist zuerst von Herrn Seidel bemerkt.

Der Satz an der Spitze dieses Paragraphen kann nun auch so ausgesprochen werden:

Der natürliche Logarithmus von $z - \zeta$, also $\lg(z - \zeta)$, wächst um $2\pi i$, wenn die Variabele z um die ganze Begrenzung eines den Punkt ζ enthaltenden Stückes S positiv herum geführt wird.

Wenn das Stück S nicht einfach zusammenhängend ist, also die Begrenzung aus mehreren Stücken besteht, so muss die Variabele z natürlich über alle einzelnen Begrenzungsstücke geführt werden, und zwar so, dass für jedes einzelne Begrenzungsstück die begrenzte Fläche zu derselben Seite, nämlich für alle Stücke zur linken Seite liegt. Wird der Integrationsweg über q hinweg beliebig oft geführt, so erhält man beliebig viele Werthe für den Logarithmus, die einander nach dem Modul $2i\pi$ congruent sind, d. h. sich nur um ein Multiplum von $2i\pi$ unterscheiden.

§ 17. Weitere Untersuchungen über den Logarithmus. Im Begriff der Function liegt die Bestimmtheit also Eindeutigkeit, und wenn an einer Stelle eine Function nicht bestimmt ist, aber doch bis in jede beliebige Nähe derselben, so wird dadurch, dass man die Function dort singulär nennt, der Functionsbegriff eben modificirt und die Ausnahme gekennzeichnet. Gleichwohl spricht man von mehrdeutigen, im Grunde besser von mehrändrigen Functionen. Der Logarithmus giebt für

die Möglichkeit solcher Functionen ein äusserst instructives Beispiel, das schon hier, wo wir im Allgemeinen nur von eindeutigen Functionen reden, einer erledigenden Besprechung zugänglich ist. Da diese Function durch ein Integral definirt wurde, so mischt sich in die Bestimmung derselben für ein gegebenes z noch der Integrationsweg ein. Es wird $lg\,z$ gewissermassen nicht durch Einsetzen von z allein in diese Function erhalten, sondern durch ein successives Verfolgen der Werthe dieser Function längs eines gegebenen Weges von einem bestimmten Anfangspunkte, etwa von $z=1$ aus, wo $lg\,z$ gegeben gedacht wird, bis zum Werthe im Punkte z, welches Verfolgen mittels der Summendefinition des Integrales $\int d\,lg\,z = \int dz:z$, über jenen Weg erstreckt, geschieht. Hieraus folgt von selbst die Mehrändrigkeit dieser Function.

Wir zerschneiden die z-Ebene durch eine knotenlose, an sich beliebige, vom Punkte ∞ nach dem Punkte 0 führende Linie q, die wir, um mit bestimmten Vorstellungen zu rechnen, mit der Achse des negativ Reellen zusammenfallen lassen.*) Setzen wir dann $lg\,1 = 0$ und beschränken z auf die durch q zerschnittene Ebene, die T' heissen mag, so ist $lg\,z = \int_1^z dz:z$ in T' überall völlig bestimmt. Man nennt die Werthe der so beschränkten Function, deren imaginärer Theil zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, Hauptwerthe der Function, oder ihre Gesammtheit den Hauptzweig des Logarithmus. Dieser Zweig ist nicht blos im Punkte $z=0$ unstetig und singulär, und im Punkte ∞, welche Punkte beide auf q liegen, sondern ist in T, der nicht zerschnittenen z-Ebene, längs der ganzen Linie q unstetig, denn seine Werthe auf dem positiven Ufer von q sind überall um $2i\pi$ grösser als die Werthe in den entsprechenden Punkten des negativen Ufers derselben Linie. Gleichwohl lässt sich die Function $lg\,z$ stetig über q fortsetzen. Führt ein Weg über q hinweg n-mal um den Punkt 0 herum, also auch n-mal die Linie q (positiv oder negativ) überschreitend, so ändert sich das Integral $\int_1^z dz:z = lg\,z$, wenn z auf diesem Wege vorrückt, stetig wie eine Function der complexen Veränderlichen z, erhält aber im Endpunkte einen Werth, der vom Hauptwerth dort um $2ni\pi$ oder $-2ni\pi$ verschieden ist, je nachdem der Weg die Linie q n-mal vom positiven zum negativen Ufer überschreitet, oder umgekehrt. Die Gesammtheit der Werthe $lg\,z \pm 2ni\pi$, wo $lg\,z$ der Hauptwerth ist, kann man schicklich den $\pm n$ten Zweig der Function $lg\,z$ nennen und mit $lg_{\pm n}(z)$ bezeichnen, und die zugehörige Ebene mit $T'_{\pm n}$.

Die Logarithmen der Handbücher beschränken sich auf reelle Veränderliche, und da eine reelle Zahl nur einen reellen Logarithmus besitzt, der dort allein in Betracht kommt, so macht sich in ihnen die Unbestimmtheit des Logarithmus an sich nicht geltend. Der Logarithmus einer complexen Zahl $z = abs\,z\,.\,e^{i\,arc\,z} = re^{ti}$ ist nach dem erwiesenen Additionstheorem durch die Gleichung bestimmt

$$lg\,z = \int_1^r dz:z + \int_1^{e^{ti}} dz:z = \int_1^r dz:z + i\int_0^t dt = i\,arc\,z + lg\,abs\,z,$$

wo $lg\,abs\,z$ den Hauptwerth, also (weil jedes Integrationselement reell ist) eine reelle Grösse bezeichnet, $arc\,z$ aber durch seine Unendlichvieldeutigkeit den Charakter des Logarithmus vortrefflich kennzeichnet.

Eine gute Vorstellung von der Verzweigung des Logarithmus erhält man durch die Methode der Abbildung.

Den Punkt der w-Ebene, welcher einem beliebigen Punkte der z-Ebene entspricht, wenn diese durch die Linie q begrenzt gedacht wird, der also zum Hauptzweig gehört, erhält man aus der Gleichung $w = lg\,z = ti + lg\,r$, wo $z = r(cos\,t + i\,sin\,t)$ gesetzt ist. So entsprechen den Punkten des negativen Ufers von q alle Punkte einer Linie in der w-Ebene, die der u-Achse parallel ist und die v-Achse im Punkte $w = -\pi i$ $(v = -\pi)$ trifft, weil dort $z = r(cos\,\pi - i\,sin\,\pi)$ ist.

*) Ich kann es mir nicht versagen, hier gegen den Ausdruck „um die Ideen zu fixiren" Einspruch zu erheben. Diese Redensart ist nur verständlich, wenn sie ins Französische zurückübersetzt wird „pour fixer les idées". Im Deutschen hat das Wort „Idee" einen ganz andern Sinn, und ich halte deshalb eine solche Ausdrucksweise für völlig undeutsch. J. Th.

Den gegenüberliegenden Punkten auf q^+ und q^- in der z-Ebene entsprechen in der w-Ebene gegenüberliegende Punkte der beiden durch die Gleichungen $v = -\pi$ und $v = \pi$ in rechtwinkligen Coordinaten (u, v) gegebenen parallelen Linien. Schlägt man um den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Radius ϱ einen Kreis, so entsprechen den Punkten dieses Kreises die Punkte der der v-Achse parallelen Strecke zwischen $w = lg\,\varrho - i\pi$ und $w = lg\,\varrho + \pi i$ einmal und nur einmal, weil der Punkt w auf dieser Strecke immer nur vorwärts rückt, während z auf jener Peripherie vorwärts geht. Dieser Kreis schneidet die beiden Ufer von q rechtwinklig, die Strecke von $u - i\pi$ bis $u + i\pi$ schneidet die diesen Ufern entsprechenden Linien ebenfalls rechtwinklig. Dem Einheitskreise entspricht die v-Achse zwischen $-\pi i$ und πi. Den Punkten ausserhalb des Einheitskreises entsprechen Punkte mit positiv reellem Theile, den inneren Punkten Punkte mit negativ reellem Theile. Den Punkten einer Geraden der z-Ebene durch den Anfangspunkt, welche mit der x-Achse den Winkel α bildet, entsprechen die Punkte einer der u-Achse parallelen Geraden, welche die v-Achse im Punkte $v = \alpha$ oder $w = \alpha i$ trifft ($u + \alpha i$ in der Zeichnung), und zwar jedem Punkte der einen Linie ein Punkt und nur ein Punkt der andern. Daraus geht hervor, dass jedem Punkte des Gebietes T', d. h. der durch q begrenzten z-Ebene, ein Punkt und nur ein Punkt des Parallelstreifens der w-Ebene zwischen den Linien $v = -\pi$ und $v = \pi$ entspricht und umgekehrt. Ausserdem besteht überall in diesen Gebieten Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen, so dass entsprechende Curven sich unter gleichen Winkeln schneiden, wie wir schon oben bei einem Kreise sahen, ausgenommen an den Stellen $z = 0$ und $z = \infty$, weil $w'(z) = 1 : z$ an der einen Stelle ∞, an der andern 0 wird, oder weil im Punkte ∞ von Aehnlichkeit eigentlich überhaupt nicht gesprochen werden kann.

v, $3\pi i$, $(u + 3\pi i)$, $2\pi i$, $(u + 2\pi i)$, πi, $\pi i + lg\,\varrho$, $(u + \pi i)$, $(u + \alpha i)$, αi, (u), 0, u, $= lg\,\varrho$, $-\pi + lg\,\varrho$, $(u - \pi i)$, $-\pi i$

Setzt man die Function $w(z) = lg\,z$ über die Linie q hinweg stetig fort, z. B. zunächst so, dass man z vom Punkte 1, wo $w = 0$ ist, in einer beliebigen Curve in T um den Punkt 0 herum aufs positive Ufer von q führt und mit Beibehaltung des dort erlangten Werthes von $lg\,z$ über q hinweg zum Punkte z fortschreitet, so erhält man dort einen Werth von $lg\,z$, der von dem Werthe, der zu T' gehört, um $2\pi i$ verschieden ist. Führt man nun wieder z in der ganzen Ebene T', die jetzt mit T'_1 zu bezeichnen ist, herum, ohne q zu überschreiten, so erhält man überall vollkommen bestimmte Werthe, die zusammen den Zweig $lg_1(z)$ der Function $lg\,z$ ausmachen.

Die stetige Fortsetzung besteht also darin, dass man $lg_1(z)$ auf dem negativen Ufer von q die Werthe giebt, die $lg\,z$ auf dem positiven hat. Dieser Zweig bildet sich in der w-Ebene auf den Streifen zwischen den Linien $v = \pi$ und $v = 3\pi$ (in der Zeichnung $u + \pi i$, $u + 3\pi i$), welcher sich lückenlos an den früheren Streifen anschliesst, ab. Setzt man diesen Zweig in derselben Weise über die Linie q fort, indem man dem Zweige $lg_2(z)$ die Werthe auf dem negativen Ufer von q zukommen lässt, welchen $lg_1(z)$ auf dem positiven hat, so bildet sich dieser Zweig auf den Streifen zwischen $v = 3\pi$ und $v = 5\pi$ ab, etc. Ebenso gelangt man zu einem neuen Zweige der Function $lg\,z$, $lg_{-1}(z)$, indem man diesem Zweige auf dem positiven Ufer von q die Werthe zuertheilt, die $lg\,z$ auf dem negativen hat. Die Werthe von $lg\,z$ in Punkten dieses Zweiges unterscheiden sich dann von den Werthen des Hauptzweiges offenbar um $-2\pi i$, und es bildet sich dieser Zweig in der w-Ebene auf den Streifen zwischen der Linie $u - \pi i$ und $u - 3\pi i$ winkeltreu ab. Ebenso bildet man die Zweige lg_{-2}, lg_{-3} etc. Jeder Zweig lg, lg_1, lg_2, ... lg_{-1}, lg_{-2}, ... ist eine längs q unstetige Function von z, weil sich die Werthe desselben auf beiden Ufern um $2\pi i$ unterscheiden, während die gesammte Function $lg\,z$ nur in den Punkten $z = 0$ und $z = \infty$ unstetig ist, denn eben da, wo ein Zweig unstetig wird, setzt sich die Function $lg\,z$ in einen benachbarten Zweig stetig fort. Entwickelt man z. B. den Hauptwerth von $lg\,z$ nach Potenzen von $z + a$ in die Reihe

$$lg\,z = i\pi + lg\,a - \frac{z+a}{a} - \frac{(z+a)^2}{2\,.\,a^2} - \frac{(z+a)^3}{3\,.\,a^3} - \ldots,$$

worin a eine positive Zahl ist, so convergirt die Reihe für alle Punkte im Innern eines Kreises, dessen Mittelpunkt $-a$, und dessen Radius a ist. In der einen Hälfte dieses Kreises gehört aber die durch die Reihe dargestellte Function zum Hauptzweige $lg(z)$, in dem Theile auf der negativen Seite von q zum Zweige $lg_1(z)$, weil dieser die stetige Fortsetzung des Zweiges $lg\,z$ in dieser Richtung ist, und eine convergente Potenzreihe immer eine stetige Function darstellt. Die Linie q hat auf die Function $lg\,z$ keinen directen Einfluss, sondern nur auf ihre Eintheilung im Zweige. Durch Verschiebung dieser Linie werden Theile benachbarter Zweige zu andern Zweigen versetzt, ohne dass die Function selbst irgend welche Aenderung erlitte. Nimmt man z. B. die negativ imaginäre Achse zur Linie q und definirt den Hauptzweig durch die Gleichung $lg\,1 = 0$, so stellt die durch die obige nach Potenzen von $z + a$ fortschreitende Reihe in ihrem ganzen Giltigkeitsbereiche den Hauptzweig von $lg\,z$ dar, weil die ganze Viertelebene zwischen der negativ reellen und der positiv imaginären Achse zum Hauptzweig vom früheren Zweige $lg_1(z)$ hinzugekommen ist, während ein entsprechender Theil vom früheren Hauptzweige $lg\,z$ an den neuen Zweig $lg_{-1}(z)$ abgegeben ist. Alle Sätze über eindeutige Functionen gelten auch für die (eindeutigen) Zweige einer mehrdeutigen Function. Jedem Zweige kann eine besondere Ebene, dem Zweige $lg_n(z)$ die Ebene T'_n zugewiesen werden. — Den Nachweis für das Bestehen der Gleichungen $lg\,e^z = e^{lg\,z} = z$ überlassen wir der elementaren Functionentheorie.

§ 18. **Darstellung einer Function und ihrer Differentialquotienten durch Randwerthe.** *Das Integral* $\int \frac{w(z)\,dz}{(z-\zeta)\,2\pi i}$, *in positiver Richtung über die ganze Begrenzung s eines den Punkt ζ im Innern enthaltenden endlichen Stückes S, in welchem $w(z)$ den Bedingungen des Cauchy'schen Satzes genügt, erstreckt, hat den Werth $w(\zeta)$, wenn ζ nicht auf einen Punkt fällt, in welchem w unbestimmt oder unendlich wird.*

Schreibt man nämlich

$$\int \frac{w(z)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{2\pi i} = \int \frac{w(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{2\pi i} + \int \frac{w(z)-w(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{2\pi i},$$

so genügt $(w(z) - w(\zeta)) : (z - \zeta)$ in S überall, auch für $z = \zeta$, den Cauchy'schen Bedingungen, und das zweite Integral ist deshalb Null. $\int w(\zeta)\,dz : (z - \zeta)$ ist aber gleich $w(\zeta) \int dz : (z - \zeta) = 2\pi i\,w(\zeta)$ nach § 16, woraus der zu beweisende Satz folgt.

Da $1 : (z - \zeta)$ einen einzigen bestimmten ersten, zweiten, dritten etc. Differentialquotienten besitzt, also sammt seinen sämmtlichen Differentialquotienten eine **Function der complexen Veränderlichen** ζ ist, so erhält man, so lange ζ im Innern und nicht am Rande von S liegt, und nicht auf einen Punkt fällt, in welchem w unbestimmt oder unendlich wird, durch Differentiation nach der complexen Variabeln ζ die Gleichung

$$\frac{fac\,n}{2\pi i} \int \frac{w(z)\,dz}{(z-\zeta)^{n+1}} = \frac{d^n w(\zeta)}{d\zeta^n}$$

und den Satz:

Eine Function $w(z)$, die im Innern eines Stückes S den Bedingungen des Cauchy'schen Satzes genügt, ist sammt ihren sämmtlichen Differentialquotienten im Innern, aber nicht nothwendig am Rande, eine endliche, stetige und reguläre Function der complexen Variabeln z, ausgenommen etwa in Punkten, in denen w unendlich oder unbestimmt wird.

Denn in der That hat das bestimmte über die ganze Begrenzung s von S erstreckte Integral $\int w(\zeta)\,d\zeta : (z - \zeta)^{n+1}$ stets einen endlichen Werth, wenn $w(\zeta)$, was vorausgesetzt wurde, am Rande von S integrabel ist, und der Punkt z im **Innern** von S liegt, welches sonst seine Lage auch sein möge.

Die Stetigkeit aber folgt aus der Endlichkeit und dem Vorhandensein der Differentialquotienten in jedem Punkte und nach allen Richtungen. *Demnach giebt es im Innern eines Stückes S, in welchem eine Function der complexen Variabeln z den Bedingungen des Cauchy'schen Satzes genügt, weder eine*

Linie noch einen Punkt, in welchem die Differentialgleichung $\frac{i\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$ *keine Anwendbarkeit besässe, was* z. B. stattfinden würde, wenn $w(z)$ bei Annäherung des Punktes z an einen bestimmten Punkt in verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe erhielte. *Ebensowenig kann es im Innern einen Punkt u geben, in welchem eine solche Function $w(z)$ unendlich wird.* Im letzteren Falle kann man zwar den Punkt z nicht auf den Punkt u fallen lassen, weil dann offenbar der Satz $\int w(\zeta)d\zeta : 2i\pi(\zeta - u) = w(u)$ nicht anwendbar ist. Allein es ist $\int w(\zeta)d\zeta : (\zeta - z)$ immer endlich, und der absolute Betrag des Ausdruckes kann eine angebbare Zahl M, die zwar gross sein mag, die aber offenbar nur von den Werthen der Function $w(z)$ am Rande von S abhängt, nicht übersteigen, wie nahe auch z an u heran gebracht wird, während $w(z)$, welches diesem Ausdrucke, so lange z nicht genau auf u fällt, gleich ist, einen absoluten Betrag besitzen muss, der grösser als jede Zahl M gemacht werden kann, wenn man z nur nahe genug an u rückt, vorausgesetzt, dass $w(z)$ für $z = u$ unendlich wird, wobei zu beachten ist, dass eine durch Abänderung eines Werthes in einem einzelnen Punkte hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist. Daraus folgt, dass ein solcher Punkt u überhaupt nicht vorhanden sein kann. Hiernach sind die früher vorläufig noch als möglich hingestellten Ausnahmen als **unmöglich** anzusehen. Nämlich: es giebt keinen Weg durch das Innere eines einfach zusammenhängenden Stückes S, auf welchem die Integration keinen Sinn hätte; es giebt keinen Punkt z, in welchem $\int_{z_0}^{z} w(z)dz$ nicht differenzirbar wäre; es giebt keine Linie im Innern von S, in der w nicht differenzirbar wäre, und keinen Punkt, in dem w unbestimmt oder unendlich würde.

Die Function $e^{1:z}$ nimmt zwar bei Annäherung von z an Null in verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe an, aber unter diesen sind Richtungen, in denen sie über alle Grenzen wächst, und zwar wächst für positive abnehmende z das Product $z^n e^{1:z}$ über alle Grenzen, wie gross n auch sein mag. Sie genügt im Punkte $z = 0$ nicht den Cauchy'schen Bedingungen und bildet daher keine Ausnahme zu dem bewiesenen Satze. Die Function $tg(1:z)$ hat für $z = 0$ keinen bestimmten Werth, es giebt aber kein noch so kleines Gebiet um den Punkt $z = 0$ herum, in welchem $tg(1:z)$ nicht unendlich würde und also regulär wäre, oder auch nur den Bedingungen des Cauchy'schen Satzes genügte, und demnach ist auch diese Function keine Ausnahme der Regel. — Die Ausdehnung dieser Betrachtungen auf den unendlich fernen Punkt der z-Ebene ist nicht schwierig.

§ 19. **Pole.** *Wird eine Function $w(z)$ im Innern eines Stückes S im Punkte u so unendlich und im Punkte v so Null, dass $w(z)(z-u)^n : (z-v)^m$ für z gleich u und v sowohl von Null als von Unendlich verschiedene Werthe erhält, so sind m und n ganze Zahlen, wenn $w(z)$, abgesehen vom Punkte u, in S den Cauchy'schen Bedingungen genügt.*

Die Zahlen n und m heissen die Ordnungen des Unendlichwerdens oder Verschwindens.

Läge nämlich der reelle Theil von n zwischen p und $p+1$, und der von m zwischen q und $q-1$, so genügte $w(z)(z-u)^p : (z-v)^q$ in S den Bedingungen des Cauchy'schen Satzes und würde in den Punkten u und v unendlich, was nach § 18 nicht möglich ist. Ebensowenig kann $w(z)$ in verschiedenen Richtungen bei u in verschiedenen Ordnungen unendlich werden, wenn diese Function nicht wie $e^{1:(z-u)}$ in über alle Grenzen hoher Ordnung unendlich wird. Hingegen können am Rande von S gebrochene, complexe, logarithmische und andere Ordnungen des Verschwindens und Unendlichwerdens wohl vorkommen.

§ 20. **Eine Function der complexen Veränderlichen z, die überall regulär ist, mit Ausnahme einzelner Punkte, in denen sie Pole besitzt, nimmt jeden Werth gleich oft an.**

Verschwindet die in einem Ebenenstück S, das auch den unendlich fernen Punkt enthalten kann, reguläre Function in diesem Stücke nirgends, so ist $w'(z) : w(z)$ in S regulär, und es ist das über die ganze Begrenzung von S in gleichbleibendem Sinne erstreckte Integral

$$\int d\,lg\,w(z) = \int (w'(z) : w(z))\,dz = 0.$$

Im unendlich fernen Punkte wird $w'(z):w(z)$ unendlich klein zweiter Ordnung, wenn $w(z)$ dort regulär ist und die Bedingungen des Cauchy'schen Satzes erfüllt.

Ist aber $w(z)$ eine Function, die in den Punkten $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ des Stückes S so unendlich gross oder unendlich klein wird, dass $w(z)(z-u_1)^{m_1}(z-u_2)^{m_2}\ldots(z-u_n)^{m_n}=f(z)$ dort endlich bleibt, so dass also da, wo die m positive Zahlen sind, $w(z)$ mehrfache Pole besitzt, oder wo die m negative ganze Zahlen sind, unendlich klein $(-m)^{\text{ter}}$ Ordnung wird; und schliessen wir den unendlich fernen Punkt zunächst durch eine Berandung aus, so dass das Stück S' übrigbleibt, so ist das Integral über die Begrenzung von S' in positiver Richtung erstreckt

$$\int d\,lg\,f(z)=0=\int d\,lg\,w(z)+\Sigma m_\nu\int d\,lg(z-u_\nu)=\int d\,lg\,w(z)+2i\pi\,\Sigma m_\nu,$$
$$\int d\,lg\,w(z)=-2i\pi(m_1+m_2+\ldots+m_n).$$

Die Zahlen m sind negativ in den Punkten Null, positiv in den Punkten Unendlich; zählen wir jeden Punkt Null und jeden Punkt Unendlich so oft, als der Exponent m angiebt, so fliesst hieraus für das Gebiet S' der wichtige Satz:

Der Logarithmus der Function $w(z)$ wächst um so viele Multipla von $2i\pi$, wenn die Variabele um die ganze Begrenzung von S' positiv herumgeführt wird, als die Anzahl der Punkte Null die der Punkte Unendlich in S' übertrifft.

Die Begrenzung von S' enthält (allgemein zu reden) die Berandung des unendlich fernen Punktes; sie werde, positiv in Bezug auf letzteren gedacht, mit σ bezeichnet, die Begrenzung von S' werde mit s', die von S mit s bezeichnet, so dass $s'=s-\sigma$ ist. Dann geben die obigen Gleichungen die Beziehung

$$\int\limits_{(s')} d\,lg\,w(z)=\int\limits_{(s)} d\,lg\,w(z)-\int\limits_{(\sigma)} d\,lg\,w(z)=-2i\pi\,\Sigma m_\nu,\quad \int\limits_{(s)} d\,lg\,w(z)=-2i\pi(m_1+m_2+\ldots+m_n)+\int\limits_{(\sigma)} d\,lg\,w(z).$$

Ist $w(z):z^p$ im Unendlichen regulär, wo p eine ganze positive oder negative Zahl sein kann, so ist das über σ erstreckte Integral

$$\int d\,lg(w(z):z^p)=0,\quad \int d\,lg\,w(z)-p\int d\,lg\,z=\int d\,lg\,w(z)+2i\pi p,$$

woraus folgt, dass das über die ganze Begrenzung von S erstreckte Integral

$$\int d\,lg\,w(z)=-2i\pi(p+m_1+m_2+\ldots+m_n)$$

ist, und *es wächst also auch dann der Logarithmus der Function $w(z)$ um so viele Multipla von $2i\pi$, als die Zahl der Punkte Null die der Punkte Unendlich übertrifft, wenn die Variabele z die ganze Begrenzung eines Stückes S in positiver Richtung durchläuft, welches den unendlich fernen Punkt enthält.*

Ist S die ganze z-Ebene, so kann man die Berandung eines beliebigen Punktes, in dem w regulär ist und nicht verschwindet, als Begrenzung ansehen. Das Integral $\int d\,lg\,w(z)$ über diese Berandung ist Null, woraus der wichtige Satz fliesst:

Ist die Function $w(z)$ in der ganzen z-Ebene regulär ausser in einzelnen Punkten, in denen sie Pole besitzt, so wird sie ebenso oft Null als Unendlich.

Ist A ein Werth, den $w(z)$ nicht **überall** annimmt, und B ein eben solcher anderer, so ergiebt die Abzählung der Punkte Null und Unendlich der Function $f(z)=(w(z)-A):(w(z)-B)$ den Satz:

Die Function $w(z)$ nimmt, wenn sie nicht constant ist, jeden Werth in der z-Ebene gleich oft an.

Ein specieller Fall ist der: *Die Function $w(z)$ ist constant, wenn sie nirgend unendlich wird, nirgend einen Pol besitzt.*

Die Function $w(z)=z^2-2Az$ nimmt den Werth $-A^2$ nur **einmal** an, d. h. nur an einer Stelle, für $z=A$; da aber $w(z)+A^2=(z-A)^2$ dort unendlich klein **zweiter** Ordnung wird, so ist diese Stelle **zweimal** zu zählen.

§ 21. **Reihenentwickelungen.** Aus den Identitäten

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a}+\frac{(z-a)}{(\zeta-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3}+\ldots+\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}+\frac{(z-a)^{n+1}}{(\zeta-z)(\zeta-a)^{n+1}},$$
$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{z-a}+\frac{(\zeta-a)}{(z-a)^2}+\frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^3}+\ldots+\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{(\zeta-a)^{n+1}}{(z-\zeta)(z-a)^{n+1}},$$

folgen die wichtigen Sätze:

Ist z ein Punkt im Innern eines endlichen Stückes S, in dem die Function $w(z)$ regulär ist, und welches den Punkt a im Innern enthält, so ist

$$\text{I.}\qquad w(z)=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta-a}+\frac{z-a}{2i\pi}\int\frac{w(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^2}+\ldots+\frac{(z-a)^n}{2i\pi}\int\frac{w(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}+\frac{(z-a)^{n+1}}{2i\pi}\int\frac{w(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-a)^{n+1}},$$

$$\text{II.}\qquad w(z)=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{w(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}=$$

$$\frac{1}{z-a}\int\frac{w(\zeta)d\zeta}{2i\pi}+\frac{1}{(z-a)^2}\int\frac{w(\zeta)(\zeta-a)d\zeta}{2i\pi}+\ldots+\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\int\frac{w(\zeta)(\zeta-a)^n d\zeta}{2i\pi}+$$

$$\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\int\frac{w(\zeta)(\zeta-a)^{n+1}d\zeta}{(z-\zeta)\,2i\pi}.$$

In I. sind sämmtliche Integrationen in positiver Richtung über die ganze Begrenzung von S zu nehmen, in II. in negativer Richtung. Die letzten Glieder dieser Entwickelungen unterscheiden sich von den übrigen ihrer Form nach, sie mögen die **Restglieder** heissen. Die übrigen Glieder der Reihe I. sind nach § 18 Differentialquotienten, hingegen die der Reihe II. sind, abgesehen vom Restglied, sämmtlich Null.

Ist $abs(z-a) < abs(\zeta-a)$ für alle bei der Integration in Betracht kommenden ζ, ist also z ein Punkt im Innern eines um den Punkt a gezogenen Kreises C, der die Begrenzung von S wohl berührt, aber nirgend aus S heraustritt, so kann man n immer so gross nehmen, dass das Integral

$$\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int\frac{w(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

genommen über die Begrenzung von S, oder, was in diesem Falle dasselbe ist, über die Peripherie C, jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreicht. — In der That, setzen wir $\zeta-a=Re^{ti}$, $z-a=re^{t_1 i}$, so ist R der Radius von C, r aber $< R$, und unser Integral erhält die Form

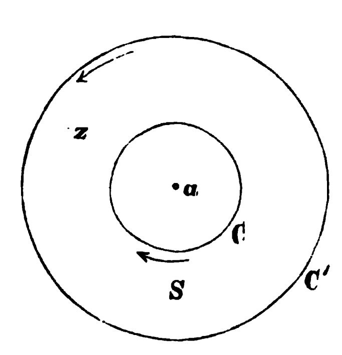
$$\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}\frac{e^{t_1(n+1)i}.R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{w(a+Re^{ti})e^{-nti}dt}{Re^{ti}-re^{t_1 i}}.$$

Das Integral ist aber, was auch n sei, weil die zu integrirende Function endlich und stetig ist, endlich und der Factor $R(r:R)^{n+1}$ kann jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen, wenn n gross genug gemacht wird. Wendet man diese Betrachtung auf das Restglied der Reihe I. an, so erhält man den **Taylor'schen Satz:**

Ist $w(z)$ im Innern eines Kreises um den Punkt a eine reguläre Function, so lässt sie sich auf eine und (nach der Methode der unbestimmten Coefficienten) nur auf eine Weise in eine unendliche Reihe nach ganzen aufsteigenden Potenzen von $z-a$ entwickeln, welche immer convergirt, so lange z ein Punkt im Innern dieses Kreises ist. Dieser Kreis heisst der Convergenzkreis.

Obgleich die hier angestellte Betrachtung des Restgliedes eigentlich nur zeigt, dass die Summe der ersten n Glieder der Reihe gegen den Werth der entwickelten Function convergire, so sieht man doch leicht ein, dass, so lange $r=abs(z-a)$ um ein Angebbares kleiner ist als R, der Radius des Convergenzkreises, die Reihe **absolut** und **unbedingt** convergent ist, d. h. eine beliebige Anordnung der Glieder zulässt, weil dies bei der geometrischen Reihe und in Folge davon bei der Reihe $\Sigma a_n z^n$, so lange $abs\, z < 1$ ist und die Coefficienten a_n endlich sind, der Fall ist. Dies findet im Allgemeinen nicht statt für die Punkte der Peripherie des Convergenzkreises. Im Innern desselben aber erhält man eine convergente Reihe auch dann, wenn man jedes Glied durch seinen absoluten Betrag ersetzt, weshalb sie eben **absolut conconvergent** heisst. — Der Convergenzkreis wird in der Regel durch seinen Radius gekennzeichnet, und es werden unter Punkten auf dem Convergenzkreise Punkte des Randes, und unter Punkten im Convergenzkreise Punkte im Innern verstanden.

§ 22. **Die Laurent'sche Reihe.** *Ist eine Function $w(z)$ im Innern und am Rande eines (beiläufig zweifach zusammenhängenden) Ebenenstückes S zwischen zwei im Punkte a centrischen Kreisen regulär, so lässt sie sich auf eine und nur auf eine Weise nach ganzen auf- und absteigenden Potenzen von $z-a$ in eine unendliche Reihe entwickeln, die so lange convergirt, als z ein Punkt im Innern von S ist.*



Seien die Peripherien des äusseren und inneren Kreises bez. C' und C, so bilden C, C' zusammen die ganze Begrenzung des Stückes S, und im Innern sowohl als am Rande ist $w(z)$ regulär. Deshalb ist die Summe der Integrale über C' in positiver und über C in negativer Richtung*) oder der Integrale über C' und C

$$\int_{C'} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{2\pi i} + \int_{C} \frac{w(\zeta)}{z-\zeta}\frac{d\zeta}{2\pi i},$$

beidemale in positiver Richtung integrirt, gleich $w(z)$, weil in der That diese beiden Integrationen zusammen der über die ganze Begrenzung von S gleichkommen. Da aber, so lange $abs(z-a) < abs(\zeta - a)$ ist, $1:(\zeta - z)$, und so lange $abs(z-a) > abs(\zeta - a)$ ist, $1:(z-\zeta)$ bez. in die absolut und unbedingt convergenten Reihen

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad \frac{1}{z-\zeta} = \sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

entwickelbar sind, und da bei der Integration über C' wirklich $abs(z-a) < abs(\zeta - a)$ und bei der über C $abs(z-a) > abs(\zeta - a)$ ist, wenn z im Innern von S liegt, so folgt

$$w(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} (z-a)^n \int_{C'} \frac{w(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i} + \sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} (z-a)^{-n} \int_{C} \frac{w(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta}{2\pi i},$$

worin nun nach dem Cauchy'schen Satze statt der Integration über C' und C eine über eine beliebige in a centrische Kreislinie zwischen C' und C gewählt werden kann.

Damit ist die Entwickelbarkeit dargethan; es muss noch nachgewiesen werden, dass sie nur auf eine Weise möglich ist, wozu die Methode der unbestimmten Coefficienten nicht ausreicht.

Sind zwei nach auf- und absteigenden Potenzen von $z-a$ geordnete, absolut oder mindestens gleichmässig**) convergente Reihen wenigstens für die Punkte der Peripherie p eines in a centrischen Kreises einander gleich, so müssen die Coefficienten gleich hoher Potenzen einander gleich sein. Multiplicirt man nämlich die Gleichung

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(n)} A_n (z-a)^n = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(n)} B_n (z-a)^n$$

mit $(z-a)^\mu$ und integrirt über die Peripherie p, wobei μ als ganze positive oder negative Zahl oder als gleich Null vorausgesetzt ist, so hat man

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} A_n \int_p (z-a)^{n+\mu} dz = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} B_n \int_p (z-a)^{n+\mu} dz,$$

und es fallen auf beiden Seiten sämmtliche Terme bis auf den mit $A_{-\mu-1}$ und auf der andern bis auf den mit $B_{-\mu-1}$ multiplicirten fort. Denn es ist $\int_p (z-a)^{n+\mu} = 0$, wenn $n+\mu$ eine von -1 verschiedene ganze Zahl ist, und $\int (z-a)^{-1} dz = 2\pi i$ nach § 16. Somit haben wir, was auch μ sein mag, $2\pi i A_{-\mu-1} = 2\pi i B_{-\mu-1}$, oder $A_n = B_n$, w. z. b. w.

---

*) Ich nenne hier positive Richtung die, bei welcher die begrenzte Kreisfläche, nicht das Stück S zur Linken bleibt.

**) Eine gleichmässig convergente Reihe heisst eine Reihe, bei der für alle Werthe der Veränderlichen eine einzige bestimmte Zahl M so gross angegeben werden kann, dass die Summe der ersten M Glieder sich von dem Grenzwerthe der Reihe um weniger als eine beliebig klein vorgegebene Grösse σ unterscheidet.

Besitzt die Function $w(z)$ im Punkte a einen $n$fachen Pol, ist aber sonst in C regulär, so bricht die absteigende Entwickelung mit dem Terme $(z-a)^{-n}$ ab. Besitzt die Function im unendlich fernen Punkte einen $n$fachen Pol, ist aber sonst ausserhalb C regulär, so bricht die aufsteigende Entwickelung mit dem Terme $(z-a)^n$ ab. Ist demnach die Function in der ganzen z-Ebene regulär und hat im unendlich fernen Punkte einen $n$fachen Pol, so ist sie eine ganze (rationale) Function vom Grade n. Das Restglied der bis zum $n$ten Terme nach Potenzen von z entwickelten Mac-Laurin'schen Reihe (I. § 22) hat die Form

$$\frac{z^{n+1}}{2i\pi}\int\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta-z)},$$

wo das Integral über einen beliebig grossen Kreis um den Punkt Null, der zugleich z umschliesst, zu erstrecken ist. Da der Integrand im Unendlichen unendlich klein zweiter Ordnung wird, so ist dieser Rest Null. — Die Darstellung einer Function durch eine nach Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe soll in jedem Falle eine Entwickelung im Punkte a heissen.

§ 23. Ganze transcendente Functionen. *Lässt sich eine Function $w(z)$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ (oder z) fortschreitende Reihe entwickeln, welche für jedes noch so grosse z convergirt, oder ist die eindeutige Function $w(z)$, was dasselbe ist, in der ganzen z-Ebene regulär, ausgenommen im unendlich fernen Puncte, so nennt man sie eine ganze transcendente Function.* Bricht die Entwickelung ab, hat $w(z)$ im unendlich fernen Punkte einen Pol, so heisst die Function schlechthin eine ganze, oder, wenn eine nähere Bestimmung nöthig wird, eine ganze rationale Function. In der Function e^z und den daraus abgeleiteten $\sin z$, $\cos z$ begegnet man in der Analysis zuerst den ganzen transcendenten Functionen. Auch die Function $1:fac\,z$ gehört zu ihnen. Schon die elementare Functionentheorie vermag eine Reihe schöner Sätze über die ganzen transcendenten Functionen zu erweisen und erzeugt unendlich viele solcher Functionen durch überall convergente Produkte. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung ihrer wesentlich singulären Stelle, des unendlich fernen Punktes, und bringen den Satz von Picard über die Nothwendigkeit der Unendlichvieldeutigkeit ihrer Umkehrungen an einer späteren Stelle.

Die Veränderliche einer ganzen transcendenten Function $w(z)$ lässt sich so dem unendlich fernen Punkte der z-Ebene nähern, dass $w(z)$ in einer Ordnung unendlich gross wird, die jede angebbare übersteigt, ich meine, ist n eine noch so grosse ganze positive Zahl, so kann man z so über alle Grenzen wachsen lassen, dass $w(z):z^n$ auch noch über alle Grenzen wächst.

Da sich $w(z)$ in eine nicht abbrechende Reihe nach ganzen Potenzen von z entwickeln lässt, so können die Entwickelungscoefficienten in $w(z)=A_0+A_1z+\ldots+A_mz^m+\ldots$, die Integrale

$$A_m=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^m}=\frac{1}{2\pi R^{m-1}}\int_0^{2\pi}w(Re^{ti})\,e^{-(m-1)ti}\,dt,$$

nicht von einem bestimmten Werthe $m=n$ ab sämmtlich verschwinden. Da aber nach dem Mittelwerthsatz bestimmter Integrale (§ 11) $abs\,A_m \leqq M:R^{m-1}$ ist, wenn M die obere Grenze von $abs\,w(Re^{ti})$ für alle t zwischen 0 und 2π ist, so würde, wenn M für jedes noch so grosse R und jedes noch so grosse m nicht $>R^m$ wäre, nothwendig $abs\,A_n$ von einem bestimmten n ab kleiner als jede noch so kleine positive Zahl, also Null werden, was gegen die Voraussetzung ist.

Hieraus folgt aber sofort der weitere Satz, *dass man z so über alle Grenzen wachsen lassen kann, dass sich $w(z)$ der willkürlich gegebenen Zahl A beliebig nähert.*

Wird nämlich erstens die Function $f(z)=w(z)-A$ unendlich oft Null, etwa in den Punkten $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\ldots a_n\ldots$, so bilden diese Nullstellen nothwendig eine Folge von Zahlen, in der unendlich viele Terme jede noch so grosse Zahl dem absoluten Betrage nach übertreffen, die also über alle Grenzen wachsen. Denn wären diese Zahlen auf ein endliches Gebiet beschränkt, so würden sie der elementaren Arithmetik zufolge eine Grenzstelle besitzen, in deren Umgebung, wie klein sie auch gewählt werden möchte, unendlich viele Nullstellen wären. Die Methode der unbestimmten Coefficienten

erweist für eine solche Function elementar den Satz, dass sie identisch Null ist. Da $f(z)$ als ganze **transcendente** Function nicht identisch Null sein kann, so lassen sich in dem zuerst angenommenen Falle aus den Zahlen $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ der Reihe nach solche wählen, dass sie über alle Grenzen wachsen und die Gleichung $f(z) = 0$ oder $w(z) = A$ erfüllen, was wir beweisen wollten. Wenn aber zweitens die Zahlenmenge $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ nur eine endliche ist (es mögen sich auch einige untereinander gleiche darin vorfinden, oder es mag $f(z)$ an einigen Stellen unendlich klein höherer Ordnung werden, so ist die Function $G(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n) : f(z)$ eine Function, die für alle endlichen z regulär ist, also eine ganze transcendente Function. Man kann deshalb z so über alle Grenzen wachsen lassen, dass sie unendlich gross, oder dass $f(z)$ unendlich klein, oder $w(z)$ beliebig nahe gleich A wird. Also auch in diesem Falle ist der Satz richtig.

Dass eine ganze transcendente Function einen einzelnen Werth gar nicht für endliche z anzunehmen braucht, lehrt das Beispiel e^z, welche Function nicht Null wird. Hingegen müssen der reelle Theil einer solchen Function und der imaginäre Theil für sich jeden beliebigen Werth unendlich oft annehmen. Ist $w(z)$ diese Function, so genügt es, diesen Satz für den reellen Theil nachzuweisen, weil er sich mittels einer gleichen Betrachtung der Function $i\,w(z)$ auch für den imaginären Theil ergiebt.

Es giebt für bestimmte z Werthe von $w(z)$, die selbst und also auch in ihrem reellen Theile sich von der grossen Zahl M und ebensolche, die sich von $-M$ beliebig wenig unterscheiden, wie wir eben gefunden haben. Verbindet man zwei solche Punkte z durch eine beliebige Linie, so muss, weil $w(z)$ stetig ist, der reelle Theil dieser Function jeden Werth zwischen $+M$ und $-M$ auf dieser Linie einmal wirklich annehmen, und da es unendlich viel verschiedene solcher Linien giebt, so muss der reelle Theil von $w(z)$ jeden Werth zwischen $-M$ und $+M$, wie gross auch die reelle Zahl M sein mag, unendlich oft annehmen, w. z. b. w.

§ 24. **Partialbrüche.** Eine Function $w(z)$, die in der ganzen z-Ebene regulär ist, ausser wo sie Pole hat, eine rationale Function, lässt sich als eine Summe aus einer abbrechenden **aufsteigenden** und aus mehreren **absteigenden** abbrechenden Potenzreihen darstellen. Die Terme der letzteren Art werden **Partialbrüche** genannt.

Ist der unendlich ferne Punkt ein $n$facher Pol, so wissen wir, dass sich die Function nach absteigenden Potenzen von z in eine in der Umgebung jenes Punktes convergente Reihe von der Form entwickeln lässt

$$w(z) = g(z) + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \ldots, \quad g(z) = C_{-n} z^n + C_{-n+1} z^{n-1} + \ldots C_{-1} z + C_0,$$

und es ist deshalb $f(z) = w(z) - g(z)$ eine Function, die im Unendlichen verschwindet und regulär ist, und sonst noch dieselben Pole als $w(z)$ besitzt.

Sind diese Pole $u_1\, u_2 \ldots u_\mu$, die bez. m_1- m_2- $\ldots m_\mu$-fache sind, und werden die **Berandungen** dieser Pole mit $(u_1), (u_2) \ldots$ bezeichnet, während s die Begrenzung eines solchen Ebenenstückes S (z. B. eines sehr grossen Kreises) sein mag, welches die sämmtlichen Pole im Innern enthält, so ist nach § 14, weil $f(\zeta):(\zeta - z)$ im Unendlichen unendlich klein **zweiter** Ordnung wird,

$$0 = \int_{(s)} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)2i\pi} - f(z) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \int_{(u_\nu)} \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)2i\pi}, \quad f(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \int_{(u_\nu)} \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{(z-\zeta)2i\pi}.$$

Liegt z **ausserhalb** der Berandung des Punktes u, welche Annahme immer zulässig ist, so lange z nicht auf u selbst fällt, ist $m > 0$, so ist

$$\int_{(u)} \frac{d\zeta}{(\zeta-u)^n (z-\zeta)} = \int_{(u)} \frac{d\zeta}{(z-u)(\zeta-u)^m} \left(1 + \frac{\zeta-u}{z-u} + \ldots + \frac{(\zeta-u)^m}{(z-u)^m} + \frac{(\zeta-u)^{m+1}}{(z-u)^{m+1}(\zeta-z)}\right) = \frac{2i\pi}{(z-u)^m}.$$

Ist daher in der Umgebung des Punktes u_ν

$$w(z) = U_{-n}^{(\nu)}(z-u_\nu)^{-n} + \ldots + U_{-1}^{(\nu)}(z-u_\nu)^{-1} + U_0^{(\nu)} + U_1^{(\nu)}(z-u_\nu) + \ldots,$$

so fliesst aus den Gleichungen

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\int_{(u_\nu)}\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{(z-\zeta)2i\pi},\quad w(z)=g(z)+\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\int_{(u_\nu)}\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{(z-\zeta)2i\pi}$$

die Darstellung

$$w(z)=g(z)+R_1(z)+R_2(z)+\ldots+R_\mu(z),$$

wo $R_\nu=\overset{(\nu)}{U}_{-n}(z-u)^{-n}+\overset{(\nu)}{U}_{-n+1}(z-u_\nu)^{-n+1}+\ldots+\overset{(\nu)}{U}_{-1}(z-u_\nu)^{-1}$ ist. Ist $w(z)$ eine, von Polen abgesehen, reguläre Function, die also rational ist, so hat die Function $w'(z):w(z)$ stets nur einfache Pole, und zwar ist da, wo $w(z)$ m-mal verschwindet, das Residuum $+m$; wo $w(z)$ m-mal unendlich gross wird, ist das Residuum $-m$. Im Unendlichen aber wird $w'(z):w(z)$ unendlich klein. Sind die Punkte Null und Unendlich von $w(z)$ $u_1\,u_2\ldots u_n$, die bez. m_1- m_2- $\ldots m_n$-fache sind, wo die $m_1\,m_2\ldots m_n$ ganze positive oder negative Zahlen sind, so ist

$$w'(z):w(z)=(m_1:(z-u_1))+(m_2:(z-u_2))+\ldots+(m_n:(z-u_n)).$$

§ 25. **Partialbruchentwickelung transcendenter Functionen.** Zuweilen lassen sich auch transcendente Functionen nach der Methode des vorigen Paragraphen darstellen. Es kommt darauf an, ein Gebiet S so zu bestimmen, dass das Integral $\int w(\zeta)d\zeta:(\zeta-z)$, über seine Begrenzung erstreckt, entweder verschwindet oder doch bei passender Vergrösserungsweise von S beliebig klein wird. Wir begnügen uns mit einem Beispiel, durch welches die Sache hinreichend klar gestellt wird, nehmen $tg\,\pi z$ für $w(z)$ an. Für das Gebiet S nehmen wir ein Quadrat mit den Ecken $m(1+i)$, $m(1-i)$, $-m(1+i)$, $-m(1-i)$, wo m eine ganze Zahl ist. Der Punkt Null ist Mittelpunkt von S, und in den Endpunkten eines jeden Durchmessers dieser Figur nimmt $tg\,\pi\zeta:\zeta$ als gerade Function gleiche Werthe an. Setzt man $\zeta=\xi+\eta i$, so ist auf den beiden der imaginären Achse parallelen Seiten des Quadrates

$$tg\,\pi\zeta=tg(\pm m\pi+\pi\eta i)=tg\,\pi\eta i=i(e^{\pi\eta}-e^{-\pi\eta}):(e^{\pi\eta}+e^{-\pi\eta}),$$

woraus folgt, dass $abs\,w(\zeta)$ auf diesen Seiten immer kleiner als Eins ist. Auf den Seiten aber, welche der reellen Achse parallel sind, ist $w(\zeta)=tg(\pi\xi\pm m\pi i)$ oder

$$i\,w(\zeta)=\frac{e^{i\pi\xi+m\pi}-e^{-i\pi\xi\pm m\pi}}{e^{i\pi\xi\mp m\pi}+e^{-i\pi\xi\pm m\pi}}=\frac{1}{1+e^{-2i\pi\xi\pm 2m\pi}}-\frac{1}{1+e^{2\pi i\xi\mp 2m\pi}}.$$

Wird m grösser und grösser genommen, so nähert sich einer der beiden letzten Ausdrücke der Eins, der andere der Null. Hiernach kann m so gross genommen werden, dass $w(\zeta)$ auf der ganzen Begrenzung s_m des Quadrates S absolut genommen kleiner als 2 ist. Das Integral über die Begrenzung s_m dieses Quadrates ist

$$I_m=\int_{s_m}\frac{tg\,\pi\zeta\,d\zeta}{\zeta-z}=\int_{s_m}\frac{tg\,\pi\zeta\,d\zeta}{\zeta}+z\int_{s_m}\frac{tg\,\pi\zeta\,d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}=z\int_{s_m}\frac{tg\,\pi\zeta\,d\zeta}{\zeta(\zeta-z)},$$

weil der Integrand $tg\,\pi\zeta:\zeta$ in den zum Punkt Null symmetrisch liegenden Stellen des Randes s_m gleiche, das Differential $d\zeta$ aber entgegengesetzte Werthe hat. Da ferner die Randkurve s_m die Länge $8m$ hat und $abs\,\zeta$ auf s_m grösser als m, $abs\,tg\,\pi\zeta<2$ ist, so ist nach § 11

$$\int tg\,\pi\zeta\,d\zeta:\zeta(\zeta-z)<16:abs(\zeta-z),$$

und also ist $abs\,I_m<16\,abs\,z:abs\,\zeta-z$ und wird für jedes endliche z beliebig klein, wenn m gross genug genommen wird. Die Pole der Function $tg\,\pi\zeta$ sind einfache, liegen in den Punkten $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\ldots -\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\ldots$, und das Residuum in jedem dieser Punkte ist $-1:\pi$, so dass sich die Formel ergiebt, in der μ der Summationsbuchstabe ist,

$$\pi\,tg\,\pi z=\lim_{m=\infty}\sum_{-m}^{m-1}\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}-z}=\sum_{0}^{\infty}\frac{2z}{(\mu+\frac{1}{2})^2-z^2}.$$

Der letzte Ausdruck ist eine von den Polen abgesehen überall convergente Reihe, der mit dem lim-Zeichen behaftete indessen nicht. Da S ein Quadrat war mit dem Nullpunkte als Mittelpunkt, so braucht unsere Gleichung nur so lange richtig zu sein, als ebenso viele Pole auf dem positiven Theile der reellen Achse als auf dem negativen liegen, und wenn gerade unter dieser Bedingung die Zahl der Pole wächst. Allerdings würde der Grenzwerth sich nicht ändern, wenn eine bestimmte feste Zahl von

Polen auf der einen Seite mehr genommen würde als auf der andern, denn mit wachsendem m würde dieser Ueberschuss gegen Null convergiren. Würde man aber z. B. die Zahl der positiven Pole p-mal so gross nehmen als die der negativen, so würde sich ergeben:

$$lim \sum_{-m}^{mp} \frac{1}{\mu+\frac{1}{2}-z} = lim \sum_{-m}^{m-1} \frac{1}{\mu+\frac{1}{2}-z} + lim \sum_{m}^{mp} \frac{1}{\mu+\frac{1}{2}-z} = \pi\, tg\, \pi z + lim \sum_{0}^{m(p-1)} \frac{1}{\mu+m+\frac{1}{2}-z}$$

$$= \pi\, tg\, \pi z + lim \sum_{0}^{m(p-1)} \frac{1}{m} \frac{1}{1+\frac{\mu}{m}+\frac{1-2z}{2m}} = \pi\, tg\, \pi z + \int_1^p \frac{d\zeta}{\zeta} = \pi\, tg\, \pi z + lg\, p,$$

also ein Werth, der nicht $\pi\, tg\, \pi z$ ist. — Setzen wir künftigen Gebrauches wegen noch $(z-h):2c$ für z, so folgt

$$\frac{\pi}{2c} tg \frac{\pi(z-h)}{2c} = \lim_{m=\infty} \sum_{-m}^{m-1} \frac{1}{h+(2m+1)c-z}.$$

§ 26. Produktentwickelung. Ist $w(z)$ eine rationale Function, die in den Punkten $v_1\, v_2 \ldots v_\mu$ bez. m_1- m_2- $\ldots$ m_μ-mal verschwindet, in $u_1\, u_2 \ldots u_\nu$ bez. n_1- n_2- $\ldots$ n_ν-mal unendlich gross wird, so ist

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = \frac{m_1}{z-v_1} + \frac{m_2}{z-v_2} + \ldots + \frac{m_\mu}{z-v_\mu} - \frac{n_1}{z-u_1} - \frac{n_2}{z-u_2} - \ldots - \frac{n_\nu}{z-u_\nu},$$

woraus durch Integration folgt:

$$lg\, w(z) = C' + lg((z-v_1)^{m_1}(z-v_2)^{m_2}\ldots(z-v_\mu)^{m_\mu}) - lg((z-u_1)^{n_1}(z-u_2)^{n_2}\ldots(z-u_\nu)^{n_\nu}),$$

$$w(z) = C\frac{(z-v_1)^{m_1}(z-v_2)^{m_2}\ldots(z-v_\mu)^{m_\mu}}{(z-u_1)^{n_1}(z-u_2)^{n_2}\ldots(z-u_\nu)^{n_\nu}},$$

$$\frac{w(z)}{w(z_0)} = \left(\frac{z-v_1}{z_0-v_1}\right)^{m_1}\ldots\left(\frac{z-v_\mu}{z_0-v_\mu}\right)^{m_\mu} : \left(\frac{z-u_1}{z_0-u_1}\right)^{n_1}\ldots\left(\frac{z-u_\nu}{z_0-u_\nu}\right)^{n_\nu}.$$

Auch transcendente Functionen lassen sich häufig durch Grenzwerthe solcher Produkte, durch unendliche Produkte darstellen, wenn sich ein Gebiet S bestimmen lässt, für welches das Randintegral des Integranden $w'(z):w(\zeta)(\zeta-z)$ entweder verschwindet, oder bei passender Vergrösserung von S beliebig klein wird, oder, was dasselbe ist, wenn $w'(z):w(z)$ eine Partialbruchdarstellung zulässt. Integriren wir das am Ende des vorigen Paragraphen stehende Beispiel über z von 0 bis z, so erhalten wir (wenn Π ein Produktzeichen und μ der veränderliche Index der Factoren ist),

$$lg\left(cos\frac{\pi(z-h)}{2c} : cos\frac{\pi h}{2c}\right) = \lim_{m=\infty} lg\left(\prod_{-m}^{m-1}(h+(2\mu+1)c-z):(h+(2\mu+1)c)\right),$$

$$cos\frac{\pi(z-h)}{2c} : cos\frac{\pi h}{c} = lim \prod_{-m}^{m-1}\left(1-\frac{z}{h+(2\mu+1)c}\right), \quad cos\frac{\pi z}{2c} = \prod_{0}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(2\mu+1)^2c^2}\right).$$

Das mit dem Zeichen lim versehene Produkt darf aus denselben Gründen wie die Summe im vorigen Paragraphen nicht schlechthin als unendliches Produkt aufgefasst werden.

Die unendlichen Produkte und Partialbruchreihen eignen sich ganz vorzüglich zur Darstellung periodischer und doppelt periodischer Functionen. Die letzten Gleichungen dieses und des vorigen Paragraphen liefern Beispiele der Darstellung einfach periodischer Functionen.

§ 27. Reihenumkehrung. Die in einem Kreise mit dem Radius R um Null convergente Potenzreihe $w(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ definirt dort eine reguläre Function. Aber auch umgekehrt giebt es, wenn man $w(z) - a_0 = \zeta$ setzt, und wenn $w'(z)$ nicht mit z verschwindet, eine Umgebung des Punktes $\zeta = 0$, in der z eine reguläre Function von ζ ist. Nimmt die Reihe $a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ den Werth Null ausser für $z = 0$ noch ein- oder mehrere male an, so kann die Gleichung $\zeta = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ vielleicht durch eine nach ganzen Potenzen von ζ fortschreitende Reihe befriedigt werden, die ein constantes Glied enthält. Verlangen wir aber, dass z mit ζ verschwinde, oder nehmen

wir an, was immer möglich ist, dass wir um den Punkt Null im Kreise R nur ein so kleines Gebiet betrachten, in welchem $a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ nur für $z = 0$ verschwindet, so giebt es nur eine Potenzreihe in ζ, welche die Gleichung befriedigt. Dass die erste Potenz in der Entwickelung nicht fehlen kann, wenn $w'(z)$ nicht Null ist, erhellt unmittelbar.

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, kann man annehmen, dass es sich um die Gleichung

$$\zeta = z - c_2 z^2 - c_3 z^3 - \dots - c_n z^n - \dots$$

handelt, in welcher die rechte Seite für $z = 1$ noch convergent ist, denn um dies zu erreichen, kann man der gegebenen Gleichung durch die Substitution αz für z, $\beta\zeta$ für ζ die gewünschte Form geben. Es folgt aus dieser Annahme, dass die c_n mit wachsenden n absolut genommen kleiner und kleiner werden. — Sind die unbestimmten Grössen eines Polynoms nur durch das + Zeichen verbunden, so wollen wir es formal positiv nennen. — Soll nun die Gleichung durch einen Ausdruck von der Form befriedigt werden

$$z = \zeta(1 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \dots + b_n\zeta^n + \dots) = \zeta P(\zeta),$$

so muss identisch

$$(z-\zeta):\zeta^2 = b_1 + b_2\zeta + \dots + b_{n+1}\zeta^n + \dots = c_2 P^2(\zeta) + c_3\zeta P^3(\zeta) + \dots + c_n\zeta^{n-2}P^n(\zeta) + \dots$$

sein, und der Coefficient von ζ^n muss beiderseits derselbe sein, so dass die $b_1, b_2, \dots b_n$ sich durch eine Recursionsformel bestimmen, die b_n aus $b_1, b_2 \dots b_{n-1}$ berechnet. Nun liefern zum Coefficienten von ζ^n, der links b_{n+1} ist, auf der rechten Seite nur die Reihen $P^2(\zeta)\ P^3(\zeta) \dots P^{n+2}(\zeta)$ einen Beitrag, und wenn man $P(\zeta) = A_n + \zeta^{n+1}B_n$, $A_n = 1 + b_1\zeta + \dots + b_n\zeta^n$, $B_n = b_{n+1} + b_{n+2}\zeta + \dots$ setzt, so liefert von dem Ausdruck

$$P^\mu(\zeta) = A_n^\mu + \mu A_n^{\mu-1}\zeta^{n+1}B_n + \tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)A_n^{\mu-2}\zeta^{2n+2}B_n^2 + \dots$$

nur das erste Glied einen Beitrag, und zwar einen formal positiven Beitrag zu diesem Coefficienten. Daraus ergiebt sich eine Beziehung $b_{n+1} = G_n(b_1, b_2, \dots b_n, c_2, c_3 \dots c_{n+2})$, in welcher G_n ein formal positives Polynom aus Produkten der Grössen b, c ist. Z. B.:

$$b_1 = c_2 = H_0,\quad b_2 = 2b_1c_2 + c_3 = 2c_2^2 + c_3 = H_1(c_2c_3),\quad b_3 = c_2(b_1^2 + 2b_2) + 3b_1c_3 + c_4,\ \dots$$

Ersetzt man nun in $b_3 = G_2(b_1 b_2, c_2 c_3 c_4)$ b_1, b_2 durch die gefundenen Ausdrücke in c_2, c_3, so dass $b_2 = H_2(c_2 c_3 c_4)$, sodann in $b_4 = G_3(b_1 b_2 b_3, c_2 c_3 c_4)$ die $b_1\ b_2\ b_3$ durch H_0, H_1, H_2, u. s. w., in $b_{n+1} = G_n(b_1 b_2 \dots b_n, c_2 c_3 \dots c_{n+2})$ b_1 durch H_0, b_2 durch H_1, b_n durch H_{n-1}, so folgt $b_{n+1} = H_n(c_2 c_3 c_4 \dots c_{n+2})$, und es ist H_n ein aus Produkten und Potenzen von $c_2\ c_3 \dots c_{n+2}$ zusammengesetztes formal positives Polynom. Der absolute Betrag eines solchen Polynoms $b_{n+1} = H_n(c_2 c_3 \dots c_{n+2})$ wird vergrössert, wenn man darin $c_2, c_3, \dots c_{n+2}$ durch M ersetzt, wofern $abs\, c_2, abs\, c_3, \dots abs\, c_{n+2} \leqq M$ ist, so dass $H_n(M, M, \dots M) \geqq abs\, H_n(c_2, c_3 \dots c_{n+2})$ ist. Hieraus ergiebt sich leicht die Convergenz der Reihe $b_1 + b_2\zeta + b_3\zeta^2 + \dots$, die ja zunächst, d. h. so lange ihre Convergenz nicht erwiesen ist, nur formal die Umkehrgleichung befriedigt. Kehren wir nämlich die Gleichung

$$\zeta = z - z^2M - z^3M - z^4M - \dots - z^nM - \dots = z - z^2M:(1-z) = (z-(M+1)z^2):(1-z)$$

nach derselben Methode um, so erhalten wir

$$z = \zeta(1 + \zeta H_0(M) + \zeta^2 H_1(M,M) + \dots + \zeta^n H_{n-1}(M, M \dots M) + \dots);$$

dass aber diese Reihe ein bestimmtes Convergenzgebiet hat, ergiebt sich daraus, dass wir dieselbe nach einer andern Methode herstellen können. Gleichviel aber nach welcher Methode die Reihe hergestellt wird, die Coefficienten müssen dieselben sein, müssen der Recursionsformel für die b Genüge leisten. Die letzte zur Umkehrung vorgelegte Gleichung kann in die Formen gebracht werden

$$z^2(M+1) - z(1+\zeta) + \zeta = 0,$$

$$z = \frac{1 + \zeta - \sqrt{(1 - 2(2M+1)\zeta + \zeta^2)}}{2(M+1)} = \frac{\zeta - \sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)} (\frac{1}{2})_\mu \zeta^\mu (\zeta - 4M - 2)^\mu}{2(M+1)},$$

worin der Wurzel das negative Zeichen gegeben wurde, weil z mit ζ verschwinden muss, und $(\frac{1}{2})_\mu$ einen Binomialcoefficienten bedeutet.

Die letzte Reihe lässt sich aber in eine nach ganzen Potenzen von ζ fortschreitende umordnen, die so lange convergirt, als

$$abs\,\zeta < 2M + 1 - \sqrt{(2M+1)^2 - 1},\quad abs\,\zeta < 1:(2M+1)$$

ist. Mithin ist auch die Reihe

$$1 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \ldots + b_{n+1}\zeta^{n+1} + \ldots = 1 + H_0(c_2)\zeta + \ldots + H_n(c_2 c_3 \ldots c_{n+2})\zeta^{n+1} + \ldots$$

eine absolut convergente in einem Kreise mit dem Radius $\varrho = 1:(2M+1)$, wenn M die grösste der Zahlen $abs\, c_2$, $abs\, c_3 \ldots abs\, c_n \ldots$ bedeutet. Das hier gefundene Convergenzgebiet ist in der Regel kleiner als das wahre Convergenzgebiet der Reihe. Allein es ist ein für die meisten Fälle genügender Gewinn, zu wissen, dass überhaupt ein gewisses Convergenzgebiet, ein Gebiet, in dem z eine reguläre Function von ζ ist, existirt.

§ 28. Mehrdeutige Umkehrungen. Wenn die umzukehrende Potenzreihe die Form hat: $w = A_0 + A_m z^m + A_{m+1} z^{m+1} + \ldots$, so dass also $A_1 = A_2 \ldots = A_{m-1} = 0$, oder $w'(0) = w''(0) \ldots = w^{(m-1)}(0) = 0$, A_m aber der erste von Null verschiedene Coefficient ist, so sind die vorigen Schlüsse nicht erlaubt. Man kann aber diesen Fall sogleich auf den vorigen zurückführen, indem man schreibt

$$\sqrt[m]{\frac{w-A_0}{A_m}} = z\left(1 + \frac{A_{m+1}}{A_m}z + \frac{A_{m+2}}{A_m}z^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{m}} = z(1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_m z^m + \ldots),$$

weil in der Umgebung des Punktes Null, wenn für den Logarithmus der Hauptwerth genommen wird,

$$\left(1 + \frac{A_{m+1}}{A_m}z + \frac{A_{m+2}}{A_m}z^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}\,lg\left(1 + \frac{A_{m+1}}{A_m}z + \frac{A_{m+2}}{A_m}z^2 + \ldots\right)}$$

regulär ist und sich in eine Potenzreihe $1 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots$ mit bestimmtem Convergenzbereich entwickeln lässt. Nach den im vorigen Paragraphen gefundenen Sätzen folgt hieraus sogleich, dass in einem bestimmten von $B_1, B_2, \ldots$, also von $A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots$ abhängenden Gebiete z durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $\sqrt[m]{w - A_0}$ fortschreitende Reihe darstellbar ist, die in jedem Punkte des Convergenzgebietes m Werthe besitzt, weil die $m$te Wurzel m-deutig ist.

§ 29. Erweiterung des Umkehrproblems. Wir betrachten jetzt eine Reihe $a = a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots + a_n s^n + \ldots$, in welcher $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ um Null reguläre Functionen von z sind, die sich nach ganzen Potenzen von z entwickeln lassen. Dabei nehmen wir an, dass a mit z verschwinde, a_1 hingegen mit z nicht verschwinde. Dann sind auch $a : a_1 = c'$, $a_2 : a_1 = -c'_2, \ldots, a_n : a_1 = -c'_n, \ldots$ in der Umgebung des Punktes Null reguläre Functionen, also durch Reihen darstellbar, die nach ganzen Potenzen von z fortschreiten. Dabei ist noch vorauszusetzen, dass das Convergenzgebiet von a_n nicht mit wachsendem n gegen Null convergirt, woraus dieselbe Eigenschaft für c'_n von selbst fliesst. Hierauf machen wir die Substitution $z = \alpha\zeta$ und richten α so ein, dass die Reihen $c', c'_2, c'_3, \ldots$ für $\zeta = 1$ noch convergiren. Die Coefficienten der Potenzen von ζ in diesen Reihen besitzen alsdann in Bezug auf ihren absoluten Betrag eine obere Grenze, ein Maximum G, weil sie mit wachsendem Index gegen Null convergiren. Mit dieser Grösse dividiren wir und setzen $c' : G = c$, $c'_2 : G = c_2, \ldots, c'_n : G = c_n, \ldots$, so dass wir es mit der Gleichung zu thun haben

$$c = s - c_2 s^2 - c_3 s^3 - \ldots - c_n s^n - \ldots,$$

worin $c, c_2, c_3, \ldots$ nach ganzen Potenzen von ζ fortschreitende Reihen sind, deren Coefficienten ihrem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich den Coefficienten der Reihe $1:(1-\zeta) = 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \ldots$ sind, während c mit ζ verschwindet. Ist nun $abs\,\zeta < 1$, so sind die $c_2, c_3, \ldots$ sämmtlich endliche Grössen $< 1:(1 - abs\,\zeta)$, und es ist daher nach § 27 $s = c + b_1 c^2 + b_2 c^3 + \ldots + b_n c^{n+1} + \ldots$. worin $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ formal positive Polynome von $c_2, c_3, \ldots c_{n+2}, \ldots$ sind, und mithin Functionen von ζ, die so lange regulär sind, als $abs\,\zeta < 1$ ist, und es convergirt diese Reihe jedenfalls so lange c den Werth $(1 - abs\,\zeta):(3 - abs\,\zeta)$ nicht übersteigt. Dies hat für Werthe von ζ, deren absoluter Betrag eine gewisse von den Coefficienten in c abhängige, jedoch von Null verschiedene Grösse nicht übersteigt, sicher statt, weil c mit ζ verschwindet.

Die hier unerlässlich zu erledigende Frage ist aber die, ob sich diese Reihe auch nach Potenzen von ζ ordnen lasse. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Reihe $\sigma = \gamma + \beta_1\gamma^2 + \beta_2\gamma^3 + \ldots + \beta_{n-1}\gamma^n + \ldots$, in welcher die $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ aus den $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ dadurch hervorgegangen sind, dass die

$c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ sämmtlich durch $1+\zeta+\zeta^2+\ldots = 1:(1-\zeta)$ ersetzt worden sind, und in welcher $\gamma = \zeta:(1-\zeta) = \zeta+\zeta^2+\zeta^3+\ldots$ ist. Es sind nun die Coefficienten in γ, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$, bez. dem absoluten Betrage nach grösser oder mindestens gleich den entsprechenden in c, $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, und es werden also auch, wenn man nach Potenzen von ζ ordnet, die Coefficienten der Entwickelung von $\gamma^n\beta_{n+1}$ grösser, mindestens aber gleich den Coefficienten von $c^n b_{n+1}$ sein. Dass aber $\Sigma\gamma^n\beta_{n+1}$ sich in eine Potenzreihe nach ζ umordnen lasse, ist leicht ersichtlich. Es ist nämlich σ eine Irrationalität und durch die Gleichung $\zeta = \sigma(1-\zeta)-\sigma\sigma:(1-\sigma)$ oder $\sigma\sigma(2-\zeta)-\sigma+\zeta=0$ bestimmt und lässt sich nach Potenzen von ζ entwickeln, so lange $abs\,\zeta < \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ die kleinere Wurzel der Gleichung $1-4\zeta(2-\zeta) = 1-8\zeta+4\zeta^2 = 0$ ist. In demselben Umfange muss um so mehr sich die Reihe für s in eine nach Potenzen von $\zeta = z:a$ fortschreitende Reihe umordnen lassen, so dass wir zu dem Resultate gelangt sind.

Ist $a+a_1s+a_2s^2+\ldots+a_ns^n+\ldots$ eine in einer bestimmten Umgebung von $z=0$ und $s=0$ convergente Doppelpotenzreihe, sind also $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Reihen, die nach Potenzen von z fortschreiten, und verschwindet a mit z, hingegen verschwindet a_1 mit z nicht, so ist s eine Function von z, die in einer bestimmten Umgebung des Punktes Null regulär ist.

Die letzten drei Paragraphen finden sich schon in meiner „elementaren Functionentheorie“ (Halle 1880) auf Seite 108—110.

§ 30. Umkehrung der regulären Functionen. Es sei $w(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Ebenenstück S eine reguläre Function, deren Ableitung in S nicht verschwindet, die keinen Werth zweimal annimmt, und die bis zum Rande und auf dem Rande von S jedenfalls stetig ist. Dann bedecken die Werthe von w in der w-Ebene einen einfach zusammenhängenden Bereich Σ einfach und überall, ich meine so, dass w im Innern der dem Rande s von S entsprechenden knotenlosen Contour σ von Σ auf jeden Punkt einmal und nur einmal fällt. — Wegen der Stetigkeit von w am Rande entspricht in der That dem Rande s in der w-Ebene ein continuirlicher geschlossener Zug, der keinen Knoten hat, weil in S kein Werth, den Rand eingeschlossen, zweimal angenommen werden soll. Ist nun w_0 der Werth von w im Punkte z_0 im Innern von S, so ist der Zuwachs, den $lg(w-w_0)$ erfährt, wenn z um den Rand von S herumgeführt wird, gleich der mit i multiplicirten scheinbaren Grösse von σ vom Punkte w_0 aus gesehen, und zugleich auch gleich $2i\pi$ nach § 20, weil $w(z)$ in S den Werth w_0 nur einmal annimmt. Ist aber a irgend ein Punkt der w-Ebene, so ist $\int d\,lg(w-a) = \int dw:(w-a)$, die scheinbare mit i multiplicirte Grösse von σ, gleich $2i\pi$, wenn a im Innern von σ, gleich Null, wenn a ausserhalb liegt. Es wächst aber $lg(w-a)$ um dieselbe Grösse, wenn w um σ herumgeführt wird, als wenn z um den Rand s von S herumgeführt wird. Liegt also a im Innern von Σ, so ist der Zuwachs $2i\pi$, und es muss nach § 20 w den Werth a in S einmal annehmen. Liegt a ausserhalb, so ist der Zuwachs von $lg(w-a)$ Null, und w nimmt in S den Werth a nicht an. Der Satz von der Reihenumkehrung (§ 27) führt zu dem Schluss, dass z in Σ eine reguläre Function von w sei.

Nimmt w in S denselben Werth mehrmals an, so kann Σ die w-Ebene hier und da mehrfach überdecken, und wenn $w'(z)$ in S verschwindet, so können in Σ Punkte auftreten, Verzweigungspunkte, um die herum sich w in verschiedene Zweige fortsetzt. Doch brauchen wir auf solche Fälle an dieser Stelle nicht einzugehen. Es kann aber auffallen, dass in den obigen Schlussfolgerungen von der Voraussetzung, $w'(z)$ sei nicht Null, kein Gebrauch gemacht worden ist. Es rührt dies daher, dass das Verschwinden von $w'(z)$ schon durch die Annahme, w nehme jeden Werth nur einmal an, von selbst ausgeschlossen ist.

§ 31. Fortsetzung einer regulären Function. Ist eine Function $w(z)$ in einem Gebiete S regulär, so lässt sie sich in jedem Punkte z_0 dieses Gebietes durch eine Potenzreihe darstellen, deren Convergenzkreis den Rand von S entweder berührt oder aber auch überschreitet. Im letzteren Falle wird die reguläre Function $w(z)$ durch die Reihe über das Gebiet S hinaus definirt, sie wird, wie man

sich ausdrückt, als Function der complexen Veränderlichen über S hinaus fortgesetzt. — Man pflegt den Satz auszusprechen: eine Function, die in einem noch so kleinen Gebiete, ja in einem noch so kleinen Curvenstücke, oder sogar in einer discreten Mannigfaltigkeit von unendlich vielen Punkten gegeben ist, lässt sich nur auf eine Weise als Function der complexen Veränderlichen fortsetzen, welcher Satz aber, weil man doch auch von mehrdeutigen oder mehrändrigen Functionen spricht, von denen der Logarithmus und die aus ihm definirten allgemeinen Potenzen Beispiele liefern, noch mehrfacher Beleuchtung bedarf.

Sind zwei Functionen, $w_1(z)$, $w_2(z)$, in einem noch so kleinen Gebiete regulär, und stimmen sie in diesem Gebiete in unendlich vielen Punkten, die den Punkt z_0 zum Grenzpunkt haben mögen, überein, so ist ihre Differenz ebenfalls regulär, nach Potenzen von $z-z_0$ entwickelbar, und es sind, wie die Methode der unbestimmten Coefficienten lehrt (vgl. z. B. meine „elementare Functionentheorie", S. 43, § 62), die Entwickelungscoefficienten Null, weshalb $w_1(z)-w_2(z)=w(z)$ zunächst in einem Kreise ϱ, dessen Mittelpunkt z_0 ist, und dessen Rand das gegebene Gebiet von Innen berührt, identisch Null ist. In jedem andern Punkte z'_0 dieses Gebietes S müssen demnach auch die sämmtlichen Ableitungen von w_1 und w_2 einander gleich sein. Wählt man z'_0 so, dass der zugehörige Convergenzkreis ϱ', der S von Innen berührt, theilweise aus ϱ heraustritt, und entwickelt w_1, w_2 nach Potenzen von $z-z'_0$, welche Entwickelungen im Gebiete ϱ' sicher convergiren, so sind die Entwickelungscoefficienten von w_1 und w_2 einander gleich, w_1-w_2 ist auch in dem erweiterten, durch ϱ und ϱ' bestimmten Gebiete identisch Null. Wählt man in dem erweiterten Gebiete einen Punkt z''_0 so, dass der zugehörige Convergenzkreis ϱ'' theilweise aus diesem Gebiete heraustritt, so erhält man ein wiederum erweitertes Gebiet, in dem identisch $w_1-w_2=0$ ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu dem Schlusse, dass in dem ebenen Gebiete S, in welchem w_1, w_2 regulär sind, diese Functionen identisch gleich sein müssen. Lässt sich aber, was nicht nothwendig der Fall ist, ein Punkt a in S so bestimmen, dass die Entwickelung von $w_1(z)$ und, da die Coefficienten dieselben sind, auch die von $w_2(z)$ in einem Kreise R convergirt, der theilweise aus S heraustritt, so sind die Functionen auch in dem erweiterten Gebiete, in das w_1 und w_2 durch die Entwickelungen fortgesetzt sind, identisch gleich. Da dies für jede mögliche Fortsetzung gilt, so ergiebt sich eben der Satz, dass sich eine Function, die in einem beliebig kleinen Gebiete (oder auch nur unendlich oft in demselben) gegeben ist, nur auf eine Weise analytisch oder als Function der complexen Veränderlichen oder, was nach dem Früheren dasselbe ist, durch Potenzreihen fortsetzen lasse.

Es ist dieser Satz in der Analysis oft von grossem Nutzen. Es gelingt nämlich häufig, die Identität zweier Functionen der complexen Veränderlichen z, $w_1(z)$ und $w_2(z)$, mit Hilfsmitteln nachzuweisen, die nur für ein beschränktes Gebiet anwendbar sind, z. B. nur für reelle z. Es folgt dann die Richtigkeit der Identität für alle Werthe von z, bis zu denen hin die Functionen sich analytisch fortsetzen lassen.

Ist die Fortsetzbarkeit einer Function auf ein endliches Gebiet beschränkt, wofür die Thetafunctionen ein Beispiel liefern werden, so nennt man den Rand dieses Gebietes die natürliche Begrenzung dieser Function.

Es tritt aber der Fall, dass eine Function der complexen Veränderlichen z über ein Gebiet S überhaupt nicht fortgesetzt werden kann, in der gemeinen Analysis viel seltener ein als der, dass nur einzelne Punkte niemals in das Innere eines Convergenzkreises fallen, dass einzelne singuläre Stellen der Fortsetzung einer Function hemmend in den Weg treten. Sind solche Punkte Pole, so lässt sich die gegebene Function in ihnen durch eine Potenzreihe darstellen, die einige ganze negative Potenzen enthält, und ist sie in einem Gebiete S' regulär, welches aus S dadurch entstanden ist, dass ein Punkt durch eine (beliebig kleine) Berandung ausgeschlossen wird, so ist die Function nach dem Laurent'schen Satze in der Umgebung dieses Punktes durch eine Potenzreihe darstellbar, die, allgemein zu reden, unendlich viele positive und negative Potenzen enthält. Jene Stelle ist dann eine sogenannte wesentlich singuläre Stelle von derselben Eigenthümlichkeit, wie sie einer ganzen transcendenten Function im unendlich fernen Punkte zukommt. Diese Fälle geben offenbar zu einer Mehrdeutigkeit der Fortsetzung

keine Veranlassung. — Es kann aber vorkommen, dass ein Punkt a eine andere Art von Singularität aufweist. Es mögen $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, z_o$ eine Reihe um a in einer geschlossenen Linie herumliegender Punkte sein. In jedem ist $w(z)$ in eine Potenzreihe entwickelbar mit den Convergenzkreisen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$, deren Ränder sämmtlich durch a gehen. Es liegt z_1 im Kreise ϱ_0, z_2 im Kreise $\varrho_1, \ldots$, z_n im Kreise ϱ_{n-1}, und z_o im Kreise ϱ_n; die Kreise ϱ_n und ϱ_o überdecken sich theilweise. Dann ist es keineswegs nothwendig, und $lg\, z$ mit der singulären Stelle Null ist das einfachste Beispiel einer solchen Function, dass in den sich überdeckenden Punkten in ϱ_0, ϱ_n die Werthe von $w(z)$ dieselben sind. Es kann sich $w(z)$ bei Fortsetzung der Function um die Stelle a herum, wie man sagt, verzweigen, in denselben Punkten verschiedene Werthe annehmen, weshalb dieser singuläre Punkt ein Verzweigungspunkt genannt wird. Soll für solche Fälle der Satz von der Einheit der Fortsetzung einer Function noch aufrecht erhalten bleiben, so muss, wie unmittelbar ersichtlich, für solche mehrändrige Functionen dieser Satz in gewisser Weise näher bestimmt werden. Wir nennen die geraden Verbindungslinien der Punkte $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_m$, deren Convergenzkreise $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ so beschaffen sind, dass $\varrho_0\; z_1, \varrho_1\; z_2, \ldots, \varrho_{m-1}\; z_m$ enthält, den Weg der Fortsetzung. *Dann sind die Fortsetzungen zweier Functionen w_1, w_2, die in einem Gebiete übereinstimmen, so lange identisch gleich, als die Fortsetzungen auf gleichen Wegen hergestellt werden,* was keiner besonderen Erörterung bedarf.

In besonderen Fällen, wie beim Logarithmus, hat man einfache Hilfsmittel, die durch verschiedene Wahl der Wege entstehenden verschiedenen Fortsetzungen von einander zu trennen, die Function in einändrige Zweige zu zerlegen. Oder es können die Riemann'schen Flächen (statt der Ebene) dazu dienen, die Mehrändrigkeit der Functionen zu beseitigen. Ein Eingehen auf diese Methoden und Gebilde vermeide ich jedoch jetzt in der Meinung, dass die sich hier von selbst ergebenden besonderen Beispiele solcher Methoden und Riemann'scher Flächen ausserordentlich geeignet sind, auf allgemeinere Betrachtungen dieser Art vorzubereiten.

Es wird sich für's Folgende empfehlen, eine in einem Gebiete S reguläre Function kurz „eine in S ganze Function“, und wenn sie nur Pole hat, „eine in S rationale Function“ zu nennen.

Die doppelt periodischen und die Thetafunctionen.

§ 32. Bezeichnung. Bei der Darstellung der doppelt periodischen und der Thetafunctionen durch Reihen und Summen macht sich das Bedürfniss nach einer kürzeren Bezeichnungsweise geltend, obschon die, welche die Summation durch ein vorgesetztes Σ und das Produkt durch ein vorgesetztes Π ausdrückt, sehr correkt ist; sie macht aber noch eine Angabe des Summations- bez. Produktindex und ausserdem des Anfangs- und Endgliedes nöthig. Dies vermeiden wir dadurch, dass wir den Zeichen $\mathfrak{S}$, $\bar{\mathfrak{S}}$, denen ein Term mit dem Unterscheidungszeichen m oder m', m'', m_1, m_2 u. s. w. folgt, und dem Zeichen $\mathfrak{P}$, dem ein Term mit der Marke n, n' u. s. w. folgt, ein- für allemal eine bestimmte Bedeutung geben. Es soll nämlich gesetzt werden

$$\mathfrak{S}\varphi(m) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots, \quad \bar{\mathfrak{S}}\varphi(m) = \ldots \varphi(-2) + \varphi(-1) + \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots,$$
$$\mathfrak{P}\varphi(n) = \varphi(0)\varphi(1)\varphi(2)\ldots \text{ in infinitum.}$$

Treten aber Doppelsummen oder Doppelprodukte auf, bei denen ja die Summationsfolge bez. Factorenfolge nicht immer vertauscht werden kann, so soll der Posten bez. Factoren bildende Buchstabe als Index an die Zeichen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ gehängt werden. — Die Variabele ist bisher mit z bezeichnet worden. Bei Untersuchung doppelt periodischer Functionen ist aber der Buchstabe u beinahe typisch geworden, weshalb derselbe auch hier gewählt werden soll. Ausserdem soll derselbe aber auch als Functions-

zeichen benutzt werden. Es fehlt bis heute noch an einem einfachen, allgemein anerkannten Zeichen für die Umkehrung der einfachsten doppelt periodischen Function, oder für das Legendre'sche elliptische Normalintegral erster Gattung. Durch $u(z)$ oder die später zu erklärende nähere Bezeichnung $u(s,z)$ soll hier dies Integral gekennzeichnet werden. — Jede doppelt periodische Function, d. h. jede Function $w(u)$, welche für ganze positive oder negative μ_1, μ_2 die Gleichung befriedigt $w(u+\mu_1\pi_1+\mu_2\pi_2) = w(u)$, lässt sich, wie sich zeigen wird, durch gewisse specielle unter ihnen darstellen, und unter diesen zeichnen sich besonders solche aus, welche entweder gerade oder ungerade sind, also entweder die Gleichung $w(-u) = w(u)$, oder die Gleichung $w(-u) = -w(u)$ befriedigen. Bei den geraden oder ungeraden Functionen spielen aber die, Periodicitätsmoduln oder kürzer Perioden genannten, Grössen π_1, π_2 nicht bloss, sondern schon ihre Hälften $\frac{1}{2}\pi_1$, $\frac{1}{2}\pi_2$ eine hervorragende Rolle. Aus diesem Grunde wollen wir uns dem Gebrauche anschliessen, den Perioden die Form $2\pi_1, 2\pi_2$ zu geben. Erscheint in einigen Sätzen das Mitschleppen des Factors 2 lästig, so lohnt sich in vielen andern Fällen diese Schreibweise durch Kürze. Auch bei den einfach periodischen Functionen $\sin u$, $\cos u$, deren Periode 2π ist, tritt schon eben dieser Factor 2 auf.

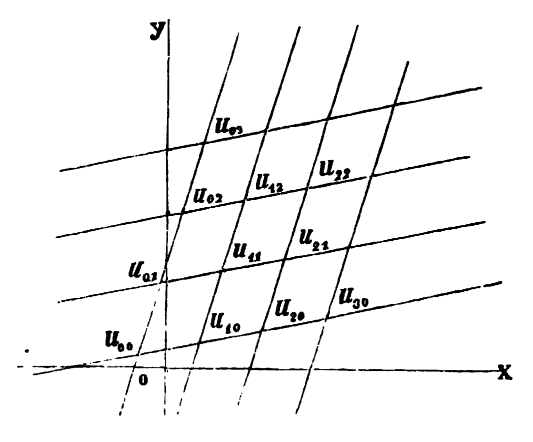
Besteht zwischen zwei Zahlen u und v die Gleichung $u = v + 2\mu_1\pi_1 + 2\mu_2\pi_2$, worin μ_1, μ_2 beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind, so nennt man u und v einander nach den Moduln oder Perioden $2\pi_1, 2\pi_2$ congruent und schreibt $u \equiv v\ (2\pi_1, 2\pi_2)$, oder wenn keine Verwechselung möglich ist, nur $u \equiv v$. Incongruente Zahlen sind solche, zwischen denen eine Gleichung der gegebenen Form nicht besteht. Unter μ, ν, m, n verstehen wir vorwiegend ganze positive oder negative Zahlen, auch dann, wenn $\mu, \nu, \ldots$ mit einem Index versehen sind. — Die doppelt periodischen Functionen, die hier behandelt werden, sind, vom unendlich fernen Punkte abgesehen, ausschliesslich überall eindeutige.

§ 33. Primitive Perioden. Elementarparallelogramme. Die trigonometrische Function $\sin u$ besitzt die Perioden $2 \,.\, 2\pi$ und $3 \,.\, 2\pi$. Man wird sie aber deshalb nicht eine doppelt periodische nennen. Beide Perioden sind ja Multipla der einen 2π, und nur diese verdient den Namen einer eigentlichen oder primitiven oder Elementarperiode, obschon 2π in der Regel nur schlechthin die Periode ohne Epitheton genannt wird. Besitzt die Function $w(u)$ die Perioden $2\pi_1$ und $2\pi_2$, so ist auch $2\pi_3 = 2\mu_1\pi_1 + 2\mu_2\pi_2$ eine Periode von $w(u)$. Sind π_1, π_2 so beschaffen, dass jede Periode von $w(u)$ in die Form $2\mu_1\pi_1 + 2\mu_2\pi_2$ gesetzt werden kann, so nennt man $2\pi_1$, $2\pi_2$ Elementarperioden oder primitive Perioden. Sind $2\pi_1, 2\pi_2$ Elementarperioden, und sind $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ solche ganze positive oder negative Zahlen, für welche $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = \pm 1$ ist, so sind auch $2\pi'_1 = 2\mu_1\pi_1 + 2\mu_2\pi_2$, $2\pi'_2 = 2\nu_1\pi_1 + 2\nu_2\pi_2$ ein Paar primitiver Perioden. Denn aus diesen Gleichungen folgt

$$\pm 2\pi_1 = 2\pi'_1\nu_2 - 2\pi'_2\mu_2, \quad \pm 2\pi_2 = -2\nu_1\pi'_1 + 2\mu_1\pi'_2,$$

und jede ganzzahlig linear durch $2\pi_1$, $2\pi_2$ darstellbare Periode ist ebenso durch $2\pi'_1$, $2\pi'_2$ darstellbar.

Es wird im folgenden Paragraphen erwiesen werden, dass die vier Punkte der u-Ebene, u_{00}, $u_{10} = u_{00} + 2\pi_1$, $u_{01} = u_{00} + 2\pi_2$, $u_{11} = u_{00} + 2\pi_1 + 2\pi_2$, ein wirkliches Parallelogramm bilden, wir nennen es ein Periodenparallelogramm, und wenn $2\pi_1$, $2\pi_2$ Elementarperioden sind, ein Elementarperiodenparallelogramm, oder kürzer ein Elementarparallelogramm. Durch Wiederholung der Construction dieses Parallelogrammes nach Art der nebenstehenden Figur bedeckt man die ganze Ebene mit einander congruenten Parallelogrammen, deren Ecken Träger von Zahlen der Form $u_{\mu\nu} = u_{00} + 2\pi_1\mu + 2\pi_2\nu$ sind. Das Parallelogramm mit den Ecken $u_{\mu\nu}$, $u_{\mu+1,\nu}$, $u_{\mu,\nu+1}$, $u_{\mu+1,\nu+1}$ mag kurz als das Parallelogramm $u_{\mu\nu}$ bezeichnet werden. Eine doppelt periodische Function ist nun offenbar vollständig bestimmt, wenn sie in einem dieser Parallelogramme bestimmt ist. Liegt u im Parallelogramm u_{00}, so liegt der



Träger der u congruenten Zahl $u+2\mu\pi_1+2\nu\pi_2$ im Parallelogramm $u_{\mu\nu}$, und umgekehrt, jeder Punkt in $u_{\mu\nu}$ ist Träger einer Zahl u', zu der es eine im Parallelogramm u_{00} congruente u giebt, und da $w(u')=w(u)$ ist, so braucht man $w(u)$ eben nur im Parallelogramm u_{00} zu kennen, um diese Function überall zu kennen. — Der unendlich ferne Punkt der u-Ebene ist jedem Punkte congruent. Daraus fliesst von selbst der Satz, dass eine doppelt periodische Function, wenn sie nicht constant ist, im unendlich fernen Punkte eine wesentlich singuläre Stelle besitzen muss, dass sie dort unendlich vieldeutig ist.

Die Ableitung einer doppelt periodischen Function ist ebenfalls doppelt periodisch mit denselben Perioden. Denn es ist

$$\frac{w(u+h+2\mu_1\pi_1+2\mu_2\pi)-w(u+2\mu_1\pi_1+2\mu_2\pi_2)}{h}=\frac{w(u+h)-w(u)}{h},$$

$$w'(u+2\mu_1\pi_1+2\mu_2\pi_2)=w'(u).$$

Die doppelt periodische Function ist schon bestimmt, wenn sie im Innern eines Periodenparallelogrammes und in zwei in einer Ecke, etwa in u_{00}, zusammenstossenden Seiten gegeben ist. Denn liegt u auf einer dieser Seiten, so liegen die ihm congruenten Punkte $u+2\pi_1$ oder $u+2\pi_2$, oder, wenn u der Eckpunkt ist, $u_{00}+2\pi_1$, $u_{00}+2\pi_2$, $u_{00}+2\pi_1+2\pi_2$ auf den andern Seiten oder Ecken. Deshalb wollen wir, wenn wir von einem Periodenparallelogramm reden, und wenn nicht etwa die ganze Berandung ausdrücklich hinzugenommen wird, das Innere desselben, die untere linke Ecke und die beiden in ihr zusammenstossenden Seiten ohne die übrigen Ecken und Seiten verstehen, was namentlich für die sogenannten Liouville'schen Sätze von Wichtigkeit ist.

Ist $\pi_1=p_1+q_1 i$, $\pi_2=p_2+q_2 i$, so ist $4(p_1q_2-p_2q_1)=4\,abs\,\pi_1\,.\,abs\,\pi_2\,.\,sin\,arc(\pi_2:\pi_1)$ der Flächeninhalt des Periodenparallelogramms. Entweder die Wahl des Vorzeichens der Perioden oder die Wahl der Indices 1, 2 macht es möglich, dass wir weiterhin annehmen dürfen, dass der Flächeninhalt des Periodenparallelogrammes positiv sei.

Das aus den Perioden $2\pi'_1=2\mu_1\pi_1+2\mu_2\pi_2$, $2\pi'_2=2\nu_1\pi_1+2\nu_2\pi_2$ gebildete Parallelogramm hat den Flächeninhalt $4(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1)(p_1q_2-p_2q_1)$, und wenn das Parallelogramm ein elementares ist, den Inhalt $p_1q_2-p_2q_1$. *Der Flächeninhalt aller primitiven Periodenparallelogramme ist derselbe.*

§ 34. Das Periodenverhältniss ist complex. *Eine in der ganzen u-Ebene, ausser für $u=\infty$, eindeutige, nicht constante Function der complexen Variabeln u, welche die primitiven Perioden $2\pi_1$, $2\pi_2$ besitzt, kann nicht existiren, wenn nicht $\pi_2:\pi_1$ eine complexe, jedenfalls nicht rein reelle Zahl ist.* Der folgende Beweis bleibt übrigens auch für den Fall bestehen, dass Functionen zugelassen werden, die in einzelnen Punkten wesentlich singulär, also vieldeutig sind.

Angenommen, es sei $w(u)$ eine (im Endlichen rationale) eindeutige Function von u, mit den Perioden $2\pi_1$, $2\pi_2$, deren Quotient $\pi_2:\pi_1=\varrho$ reell ist, und es sei $2\pi'=2\mu_1\pi_1+2\mu_2\pi_2$, so dass $w(u+2\pi')=w(u+2\mu_1\pi_1+2\mu_2\pi_2)=w(u)$, $2\pi'$ eine Periode ist. So betrachten wir erstens den Fall, dass π_2 und π_1 commensurabel sind, oder ϱ eine rationale Zahl in kleinster Benennung gleich $\mu:\nu$, oder $\pi_2=\mu\omega$, $\pi_1=\nu\omega$ ist. Dann giebt es bekanntlich immer zwei solche positive oder negative ganze Zahlen, μ', ν', für die $\mu\mu'+\nu\nu'=1$ ist, und es ist $2\pi'=2\pi_1\mu'+2\pi_2\nu'=2(\mu\mu'+\nu\nu')\omega=2\omega$ eine Periode von $w(u)$; $2\pi_1=\mu 2\omega$, $2\pi_2=\nu 2\omega$ sind Multipla der einen Periode 2ω. Die Function w ist demnach einfach periodisch, $2\pi_1$, $2\pi_2$ sind zwar Perioden, aber keine primitiven Perioden von w.

Sind aber zweitens π_1 und π_2 incommensurabel, ist ϱ irrational, so kann die nach Voraussetzung nicht constante Function $w(u)$ nirgend regulär sein. — Die Zahlen $2\pi_1$, $2.2\pi_1$, $3.2\pi_1$, ..., $n.2\pi_1$, ... sind einander nach dem Modul $2\pi_2$ sämmtlich incongruent. Denn wäre $2n\pi_1\equiv 2m\pi_1(2\pi_2)$, d. h. $2n\pi_1=2m\pi_1+2l\pi_2$, $(n-m)\pi_1=l\pi_2$, so wäre gegen die Voraussetzung $\pi_2:\pi_1=l:(m-n)$ rational. Es liegen daher auf der geraden Strecke s zwischen den Punkten $-\pi_2$ und $+\pi_2$ der u-Ebene unendlich viele Punkte $u_1\equiv 2\pi_1$, $u_2\equiv 4\pi_1$, ..., $u_n\equiv 2n\pi_1$, ..., die alle von einander verschieden sind, die daher (wie schon im § 23 erwähnt wurde) mindestens einen Grenzpunkt, vielleicht mehrere, vielleicht unendlich viele Grenzpunkte besitzen. Es sei der Punkt u' auf s ein solcher Grenzpunkt.

Dann giebt es unter den Zahlen $u_1, u_2, \ldots$ unendlich viele, deren Träger von u' um weniger als die beliebig klein vorgegebene Strecke $\frac{1}{2}\varepsilon$ entfernt liegen. Es seien $u_\mu \equiv 2\mu\pi_1$, $u_\nu = 2\nu\pi_1$ zwei solche Zahlen, so ist $u_{\nu-\mu} \equiv (\nu-\mu)2\pi_1$ offenbar eine Zahl, welche, absolut genommen, von Null um weniger als ε verschieden ist. Es giebt deshalb unter den Zahlen $u_1, u_2, \ldots$ auch unendlich viele solche, deren Träger dem Punkte Null beliebig nahe liegen. Der Punkt Null ist ein Grenzpunkt der Reihe $u_1, u_2, \ldots$ Ist nun u ein Punkt, in dessen Umgebung die Function $w(u)$ regulär ist — und einen solchen giebt es, wenn anders die Function $w(u)$ unter den Begriff einer Function der complexen Veränderlichen u fallen soll, gewiss —, so sind die Zahlen $u, u+2\pi_1, u+4\pi_1, \ldots, u+2n\pi_1, \ldots$ untereinander incongruent, aber Zahlen $u, u+u_1, u+u_2, \ldots, u+u_n, \ldots$ congruent, die den Punkt u als Grenzpunkt enthalten, und in allen diesen Punkten hat $w(u)$ in Folge der Periodicität denselben Werth. Demnach ist nach § 31 $w(u)$ in der Umgebung jenes Punktes u und folglich überall constant, was gegen die Voraussetzung ist. — Da also $arc\,\pi_2 : \pi_1$ nicht 0 oder π ist, so ist das Periodenparallelogramm stets ein eigentliches, nicht ein solches, dessen Ecken in einer Geraden liegen, und hat einen bestimmten Flächeninhalt.

§ 35. Eindeutige Functionen einer complexen Veränderlichen mit drei primitiven Perioden giebt es nicht. Sind $2\pi_1, 2\pi_2, 2\pi_3$ drei primitive Perioden der Function $w(u)$, so giebt es zwei reelle Zahlen a, b von der Art, dass $2\pi_3 = 2a\pi_1 + 2b\pi_2$ ist. Denn ist $\pi_\mu = p_\mu + q_\mu i$, so sind die Gleichungen $p_3 = ap_1 + bp_2$, $q_3 = aq_1 + bq_2$ lösbar, weil die Perioden primitive sind, also $p_1q_2 - p_2q_1$ nicht Null ist. Stehen nun erstens $a\,b$ in einem rationalen Verhältnisse zu einander, so dass $a = \mu_1\varrho$, $b = \mu_2\varrho$ ist, wo μ_1, μ_2 zu einander relativ prim sind, ϱ aber rational oder irrational ist, so können ν_1, ν_2 so gewählt werden, dass $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = 1$ ist, und es sind dann $2\pi'_1 = 2(\mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2)$, $2\pi'_2 = 2(\nu_1\pi_1 + \nu_2\pi_2)$, $2\pi_3$ primitive Perioden von $w(u)$. Nun ist aber $2\pi_3 = \varrho\pi'_1$, $w(u)$ besitzt zwei primitive Perioden, die in einem rein reellen Verhältnisse zu einander stehen, was nach dem vorigen Paragraphen nicht möglich ist.

Es erübrigt daher zweitens, den Fall zu untersuchen, in welchem $a\,b$ in einem irrationalen Verhältnisse zu einander stehen, so dass also wenigstens eine dieser Zahlen irrational ist. In diesem Falle, oder überhaupt wenn $a\,b$ irrationale Zahlen sind, können unter den Zahlen $2\pi_3, 4\pi_3, 6\pi_3, \ldots, 2n\pi_3, \ldots$ nicht zwei sein, die einander nach den gleichzeitigen Moduln $2\pi_1, 2\pi_2$ congruent wären. Denn wäre

$$2n\pi_3 \equiv 2m\pi_3(2\pi_1, 2\pi_2),\quad 2n\pi_3 \equiv 2m\pi_3 + 2\mu_1\pi_1 + 2\mu_2\pi_2,\quad 2(n-m)\pi_3 = 2\mu_1\pi_1 + 2\mu_2\pi_2,$$

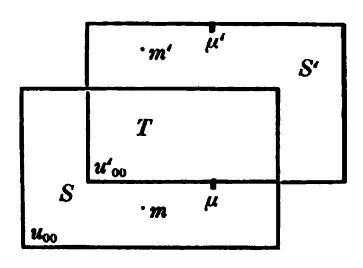
so würde von den Zahlen $a = \mu_1 : (n-m)$, $b = \mu_2 : (n-m)$ keine irrational sein. Diese Zahlen $2\pi_3, 4\pi_3, 6\pi_3, \ldots, 2n\pi_3, \ldots$ aber sind verschiedenen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ congruent, deren Träger in der u-Ebene in einem Parallelogramm liegen, dessen Ecken $-\pi_1-\pi_2$, $\pi_1-\pi_2$, $\pi_1+\pi_2$, $-\pi_1+\pi_2$ sind. Diese Punkte besitzen nothwendig mindestens einen Grenzpunkt u' von der Art, dass in jeder noch so kleinen Umgebung desselben unendlich viele der Zahlen $u_1, u_2, \ldots$ liegen. Sind u_m, u_n zwei Zahlen unter ihnen, deren Träger von u' um weniger entfernt liegen als die beliebig klein vorgegebene Strecke ε, so ist $u_{n-m} = u_n - u_m$ eine Zahl der Reihe, die vom Punkte Null um weniger als ε entfernt liegt. Daraus folgt, dass der Punkt Null ein Grenzpunkt der Zahlen $u_1, u_2, \ldots$ ist. Wird nun ein Punkt u gewählt, in dessen Umgebung $w(u)$ regulär ist, so hat diese Function in den Punkten $u, u+u_1, u+u_2, \ldots, u+u_n, \ldots$ denselben Werth wegen der vorausgesetzten dreifachen Periodicität. Von diesen Punkten liegen aber unendlich viele in der Umgebung des Punktes u, und es muss deshalb $w(u)$ in dieser Umgebung und folglich überall constant sein. Eine nicht constante Function, die irgendwo regulär ist und drei primitive Perioden besitzt, existirt demnach nicht.

Die nächsten Paragraphen werden eine Reihe allgemeiner Sätze enthalten, die theils von Liouville herrühren, theils von ihm jedenfalls zuerst im systematischen Zusammenhange vorgetragen worden sind, und die man eben deshalb die Liouville'schen Sätze nennt. Sie sind von Borchard im 88[ten] Bande des Crelle'schen Journals veröffentlicht. Bei diesen Sätzen besonders darf zu einem Periodenparallelogramm nicht die ganze Berandung gerechnet werden. — Ich wiederhole noch einmal, dass ich von der Untersuchung solcher doppelt periodischen Functionen absehe, die im Endlichen wesentlich

singuläre Stellen haben. Die Multiplicität eines Punktes Unendlich und die Anzahl solcher Punkte ist demnach stets als eine bestimmte endliche anzusehen.

§ 36. **Eine doppelt periodische Function nimmt jeden Werth gleich oft an, oder sie ist constant. Ordnungszahl.** Eine reguläre Function, wissen wir, kann, ohne constant zu sein, in einem endlichen Gebiete denselben Werth nicht unendlich oft annehmen.*) Schneiden wir aus der u-Ebene ein Stück S etwa durch einen Kreis heraus, welches mehrere an einander stossende, zusammenhängende Periodenparallelogramme umschliesst, so bilden die Stellen, für welche die doppelt periodische Function in S die Werthe a oder b annimmt, eine endliche discrete Mannigfaltigkeit von Punkten. Daher lässt sich eine unter dem Winkel $arc\,\pi_1$ gegen die reelle Achse geneigte Gerade so ziehen, dass sie in S keinen dieser Punkte trifft. Ebenso giebt es eine unter dem Winkel $arc\,\pi_2$ gegen die reelle Achse geneigte Gerade, die keinen der Punkte, in denen $(w(u)-a):(w(u)-b)=f(u)$ verschwindet oder unendlich wird, trifft. Die Geraden g_1, g_2 mögen sich im Punkte u_{00} treffen. Zieht man durch $u_{10}=u_{00}+2\pi_1$ eine Parallele zu g_2, durch $u_{01}=u_{00}+2\pi_1$ eine Parallele zu g_1, so erhält man ein Periodenparallelogramm, auf dessen Berandung keiner jener Punkte liegt, weil die Werthe von $w(u)$ in gegenüberliegenden Punkten der Berandung wegen der Periodicität gleiche sind. Die Function $f(u)$ ist, wie jede rationale Function von $w(u)$, doppelt periodisch und hat dieselben Perioden wie $w(u)$. Es wächst $lg\,f(u)$ um so viele Multipla von $2\pi i$, wenn u um die ganze Begrenzung des Parallelogrammes u_{00} herum geführt wird, als die Zahl der Punkte Null die der Punkte Unendlich übertrifft. Dieser Zuwachs ist aber das über die ganze Begrenzung erstreckte Integral $\int d\,lg\,w(u)=\int(w'(u):w(u))\,du$. Da der Integrand $w'(u):w(u)$ in gegenüberliegenden Punkten der Berandung, ich meine in Punkten, deren zugehörige Zahlen sich entweder um $2\pi_1$ oder um $2\pi_2$ unterscheiden, wegen der Periodicität denselben Werth, du aber wegen der Parallelität der Berandung in diesen Punkten entgegengesetzte Werthe hat, so ist die Summe zweier solcher Integrationselemente und folglich das ganze Integral Null. Es muss deshalb $f(u)$ ebenso oft verschwinden als unendlich werden, es muss $w(u)$ den Werth a ebenso oft annehmen als den Werth b. Diese Schlussweise würde nur dann hinfällig, wenn $w(u)$ constant gleich a oder gleich b wäre, weil dann $lg\,f(u)$ keinen Sinn hätte.

Noch ist es nöthig zur vollen Aufrechterhaltung des Satzes, dass $w(u)$ in einem Periodenparallelogramm jeden Werth gleich oft annehme, einige Bemerkungen anzuschliessen. Wird $f(u)$ im Punkte u_a unendlich klein in der $n$ten Ordnung, so muss nach dem Früheren dieser Punkt n-mal als ein Punkt Null gezählt werden. Ebenso muss man sagen, dass dort $w(u)$ den Werth a n-mal annehme, um den Satz aufrecht zu erhalten. Fällt ein Punkt, in dem $w(u)$ gleich a oder b wird, auf den Rand, so darf dieser, wie schon gesagt, nicht in seiner ganzen Ausdehnung zur Begrenzung gerechnet werden. Beim Beweise haben wir ja diesen Fall zunächst ausgeschlossen. Verschiebt man u_{00} nach u'_{00} und mit diesem Punkte das ganze Parallelogramm parallel mit sich selbst, so hat das Parallelogramm u'_{00} mit u_{00} ein Stück T gemein. Ein Stück S von u_{00} ist abgestossen, und dafür ein gleich grosses S' angefügt, und zwar ein solches Stück, dass zu jedem Punkte in S ein und nur ein Punkt S', z. B. m zu m', zugeordnet werden kann, deren zugehörige Zahlen nach den Moduln $2\pi_1$, $2\pi_2$ congruent sind. Der für u_{00} erwiesene Satz wird daher auch für u'_{00} gelten. Nur wenn m auf den Rand des Parallelogrammes, etwa auf μ, fällt, findet eine Modification statt. Rechnen wir den Punkt μ zum Parallelogramm u'_{00}, so darf ein correspondirender μ', wenigstens wenn dort $w(u)$ gleich a oder gleich b ist, nicht zum Parallelogramm gerechnet werden, weil sonst ein Punkt, in dem $w(u)$ gleich a oder gleich b wäre, nämlich μ', in das Parallelogramm eintreten würde, ohne dass ein entsprechender μ ausgeschieden wäre. Hierdurch rechtfertigt sich unsere Annahme in Bezug auf die nur theilweise Zurechnung des Randes zum Periodenparallelogramm von Neuem.



*) Vergl. meine „elementare Functionentheorie" § 62.

Nimmt eine doppelt periodische Function in einem Elementarparallelogramm jeden Werth n-mal an, so sagt man, sie sei eine doppelt periodische Function der n^{ten} Ordnung.

Als Corollar ergiebt sich, dass eine doppelt periodische Function, die nicht constant ist, im Periodenparallelogramm sicher irgendwo unendlich gross werden muss. Denn da sie jeden Werth gleich oft annimmt, so könnte sie keinen Werth annehmen, wenn sie nicht unendlich würde.

Es mag noch erwähnt werden, dass man den Fall, in welchem ein Punkt Null oder Unendlich der Function $f(u)$ auf den Rand fällt, auch dadurch erledigen kann, dass man nicht das ganze Parallelogramm verschiebt, sondern nur Theile seiner Begrenzung abändert. Wie klein man diese Abänderungen auch machen mag, immer bedient man sich in solchem Falle eines krummlinigen statt eines geradlinig begrenzten Parallelogrammes. Dies hat auch in der That kein Bedenken. Wir wollen jedoch erst dann auf solche Figuren eingehen, wenn wir mit Nothwendigkeit darauf geführt werden.

§ 37. Residuen. Niedrigste Ordnung. *Die Summe der ersten Residuen einer doppelt periodischen Function in einem Periodenparallelogramm ist Null.*

Das über die ganze Begrenzung des Periodenparallelogrammes u_{00} erstreckte Integral $\int w(u)\,du$, welches so gewählt ist, dass $w(u)$ nicht am Rande unendlich gross wird, ist einerseits gleich Null, weil die Integrationselemente in gegenüberliegenden Punkten der Begrenzung entgegengesetzt gleich sind, andrerseits gleich der Summe der Integrale derselben Function über die Berandungen der Punkte Unendlich von $w(u)$ nach § 14. Ist a ein solcher Punkt, und hat $w(u)$ in ihm die Form

$$w(u) = \frac{A_{-n}}{(u-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(u-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{-1}}{u-a} + f(u),$$

wo $f(u)$ in der Umgebung des Punktes a regulär ist, so hat das über eine Berandung des Punktes a erstreckte Integral $\int w(u)\,du$ den Werth $2\pi i A_{-1}$, ist gleich $2i\pi$ multiplicirt mit dem ersten Residuum von w in a. Die Summe der Residuen muss also Null sein. Dass bei unsern Annahmen der Fall, in welchem ein a auf den Rand fällt, keine Ausnahme bildet, ist leicht ersichtlich. Als Corollar ergiebt sich hieraus: *Eine doppelt periodische Function wird, wenn sie nicht constant ist, in einem Periodenparallelogramm mindestens zweimal unendlich gross erster Ordnung, oder einmal unendlich gross zweiter Ordnung, oder die Ordnung einer doppelt periodischen Function ist mindestens die zweite.*

Hieraus folgt beiläufig noch leicht der Satz:

Wird eine doppelt periodische Function in einem Periodenparallelogramm nur zweimal unendlich gross erster Ordnung oder nur einmal unendlich gross zweiter Ordnung, so ist das Parallelogramm ein elementares, die Perioden sind primitive.

§ 38. Die Summe der Wurzeln $c_1, c_2, \dots$ der Gleichung $w(u) = C$ in einem Periodenparallelogramm ist einer Constanten congruent. Um diesen Satz zu erweisen, werthen wir erst das Integral $\int lg\, w(u)\,du$ aus, welches über einen sogleich zu beschreibenden Weg erstreckt wird. Wir ziehen vom Punkte u_0 bis in die Nähe eines Punktes b, in welchem $w(u)$ verschwindet, eine knotenlose Linie l, auf der $w(u)$ regulär ist und nicht verschwindet, etwa bis zum Punkte u'. Das für die Zugrichtung linke Ufer von l heisst das positive. Von u' aus ziehen wir um b als Mittelpunkt einen Kreis, der eine Berandung des Punktes b bildet. Der Integrationsweg s erstrecke sich nun zuerst über das positive Ufer l^+ von l, dann über die Berandung (b) von b, diesen Punkt negativ umkreisend, und endlich auf dem negativen Ufer l^- von l zum Anfangspunkte u_0 zurück. Wird u um den Punkt b negativ herumgeführt, und wird $w(u)$ in b unendlich klein n^{ter} Ordnung, so wächst $lg\, w(u)$ um $-2ni\pi$ und ist daher auf dem negativen Ufer von l um $2ni\pi$ kleiner als auf dem positiven. Die Integrationsrichtung auf dem letzteren ist der auf dem ersteren entgegengesetzt. Wird sie aber beidemal in der Richtung von u_0 nach u' genommen, so ist das Integral über den beschriebenen Weg

$$\int_s lg\, w(u)\,du =$$

$$\int_{l^+} lg\, w(u)\,du + \int_{(b)} lg\, w(u)\,du - \int_{l^-} lg\, w(u)\,du = \int_l 2ni\pi\,du + \int_{(b)} lg\, w(u)\,du = 2ni\pi(u'-u_0) + \int_{(b)} lg\, w(u)\,du,$$

wo die über l^+ und l^-, also über dieselben Grenzen, erstreckten Integrale zusammengezogen sind, und für die Differenz $(lg\,w(u))^+ - (lg\,w(u))^-$, die Differenz der Werthe von $lg\,w(u)$ auf dem positiven und negativen Ufer von l, durch ihren Werth $2ni\pi$ ersetzt ist. Ist weiter $abs(b-u')=r$, so ist

$$\int_{(b)} lg\,w(u)\,du = i\int_0^{2\pi} r\,lg\,w(b+re^{ti})e^{ti}\,dt,$$

und dieser Ausdruck wird, absolut genommen, beliebig klein, wenn u' hinreichend nahe an b gerückt, also r klein genug gemacht wird, weil nach bekannten Sätzen $r\,lg\,w(b+re^{ti})$ mit r verschwindet. Der Werth des Integrales über s ist aber nach dem Cauchy'schen Satze von der Kleinheit der Contour (b) unabhängig, und so folgt
$$\int_s lg\,w(u)\,du = 2ni\pi(b-u_0).$$

Wird a für b gesetzt, und $w(u)$ im Punkte a unendlich gross m^{ter} Ordnung, so wird $1:w(u)$ dort unendlich klein m^{ter} Ordnung, und die gleiche Behandlung dieser Function liefert die Gleichung
$$\int_s lg\,w(u)\,du = -2mi\pi(a-u_0).$$

Wird nun $w(u)$ im Innern des Periodenparallelogrammes u_{00} nicht am Rande (welcher Fall durch Verschiebung des Parallelogrammes leicht zu erledigen ist) in den Punkten $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\mu$ bez. in der $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\mu$ten Ordnung unendlich gross, in den Punkten $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ bez. in der $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ten Ordnung unendlich klein, so ziehen wir vom Punkte u_{00} aus ins Innere des Parallelogrammes nach den Punkten $b_1, b_2, \ldots$ und $a_1, a_2, \ldots$ und um sie herum so wie oben beschriebene Züge, $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ nach den Punkten b, und Züge $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ nach den Punkten a, die sich weder selbst noch untereinander schneiden. Nun bilden diese Züge mit der ganzen Begrenzung des Parallelogrammes zusammen einen Zug σ, der ein einfach zusammenhängendes Stück der u-Ebene völlig begrenzt, in dem $w(u)$ überall regulär ist. Zu dieser Begrenzung gehören nach dem oben Ausgeführten beide Ufer gewisser Theile der Züge s und t. Das Integral $\int lg\,w(u)\,du$ über σ ist nach dem Cauchy'schen Satze Null. Also hat man

$$0=\int_\sigma lg\,w(u)\,du = \int_{s_1} lg\,w(u)\,du + \int_{s_2} lg\,w(u)\,du + \ldots + \int_{t_1} lg\,w(u)\,du + \int_{t_2} lg\,w(u)\,du + \ldots + \int_p lg\,w(u)\,du,$$

wenn p die Begrenzung des Parallelogrammes für sich bedeutet. Nun ist aber

$$\begin{aligned}\int_{s_1} lg\,w(u)\,du + \int_{s_2} lg\,w(u)\,du + \ldots + \int_{s_\mu} lg\,w(u)\,du + \int_{t_1} lg\,w(u)\,du + \ldots + \int_{t_\nu} lg\,w(u)\,du\\ = 2i\pi(n_1(b_1-u_{00}) + n_2(b_2-u_{00}) + \ldots + n_\nu(b_\nu-u_{00}) - m_1(a_1-u_{00}) - \ldots - m_\mu(a_\mu-u_{00}))\\ = 2i\pi(n_1b_1+n_2b_2+\ldots+n_\nu b_\nu - m_1a_1 - m_2a_2 - \ldots - m_\mu a_\mu),\end{aligned}$$

weil $n_1+n_2+\ldots+n_\nu-m_1-m_2-\ldots-m_\mu$, der Coefficient von u_{00}, nach dem vorigen Paragraphen Null ist. Werden die durch ihre unteren und oberen Grenzen bezeichneten Integrale geradlinig genommen, so ist weiter

$$\begin{aligned}\int_p lg\,w(u)\,du = \int_{u_{00}}^{u_{00}+2\pi_1} lg\,w(u)\,du + \int_{u_{00}+2\pi_1}^{u_{00}+2\pi_1+2\pi_2} lg\,w(u)\,du + \int_{u_{00}+2\pi_1+2\pi_2}^{u_{00}+2\pi_2} lg\,w(u)\,du + \int_{u_{00}+2\pi_2}^{u_{00}} lg\,w(u)\,du\\ = \int_{u_{00}}^{u_{00}+2\pi_1}(lg\,w(u) - lg\,w(u+2\pi_2))\,du - \int_{u_{00}}^{u_{00}+2\pi_2}(lg\,w(u) - lg\,w(u+2\pi_1))\,du.\end{aligned}$$

Die Functionen unter den Logarithmen der letzten Integranden haben wegen der Periodicität dieselben Werthe. Die Logarithmen aber können sich um Multipla von $2i\pi$ unterscheiden, die längs der Integrationswege wegen der Stetigkeit dieser Functionen sich nicht ändern. Ist

$$lg\,w(u) - lg\,w(u+2\pi_2) = \mu_1, \quad lg\,w(u) - lg\,w(u+2\pi_1) = -\mu_2,$$

so ergiebt sich

$$\int_p lg\,w(u)\,du = \int_{u_{00}}^{u_{00}+2\pi_1} 2\mu_1\pi i\,du + \int_{u_{00}}^{u_{00}+2\pi_2} 2\mu_2\pi i\,du = 2i\pi(2\mu_1\pi_1 + 2\mu_2\pi_2).$$

So folgt schliesslich aus der Gleichung $0=\int_\sigma lg\,w(u)\,du$ die weitere

$$2i\pi(2\mu_1\pi_1+2\mu_2\pi_2) + 2i\pi(n_1b_1+n_2b_2+\ldots+n_\nu b_\nu - m_1a_1 - m_2a_2 - \ldots - m_\mu a_\mu) = 0$$

oder

$$n_1b_1+n_2b_2+\ldots+n_\nu b_\nu \equiv m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_\mu a_\mu \ (2\pi_1, 2\pi_2).$$

Oder kürzer, wenn man jedes Argument so oft zählt, als Punkte Null bez. Punkte Unendlich in ihm

zusammenfallen, und das Zeichen Σ eine Summation über alle den Punkten Null entsprechenden Argumente b bez. über alle den Punkten Unendlich entsprechenden Argumente a bedeutet,

$$\Sigma a \equiv \Sigma b.$$

Sind $c_1, c_2, \ldots$ die Werthe, für welche $w(u) = C$ oder $w(u) - C = 0$ wird, so folgt aus Betrachtung der Function $w(u) - C$ ebenso

$$\Sigma c \equiv \Sigma a$$

und damit der zu beweisende Satz.

§ 39. **Sätze über die Bestimmbarkeit doppelt periodischer Functionen durch Eigenschaften in einzelnen Punkten.**

Zwei doppelt periodische Functionen mit denselben Perioden, die bez. in denselben Punkten in gleicher Ordnung verschwinden und unendlich werden, sind nur durch einen constanten Factor von einander verschieden.

Da der Quotient zweier solcher Functionen eine doppelt periodische Function ist, die nirgend unendlich wird, so ist dieselbe nach § 37 constant, und mithin ist dieser Satz richtig.

Die Differenz zweier doppelt periodischen Functionen, die dieselben Perioden haben und in denselben Punkten unendlich gross derselben Ordnung werden, und in diesen Punkten dieselben ersten, zweiten, dritten etc. Residuen haben, ist eine doppelt periodische Function, die nirgend unendlich wird, und ist folglich constant, woraus der Satz fliesst:

Eine doppelt periodische Function ist durch die Punkte, für welche sie unendlich gross wird, und durch die Residuen in diesen Punkten bis auf eine additive Constante, welche willkürlich bleibt, völlig bestimmt.

Sind $w(u)$ und $\omega(u)$ zwei doppelt periodische Functionen zweiter Ordnung, und sind a_1, a_2 die Punkte Unendlich, b_1, b_2 die Punkte Null von $w(u)$, α_1, α_2 die Punkte Unendlich, β_1, β_2 die Punkte Null von $\omega(u)$, so ist

$$w(u) = C \cdot \frac{\omega(u + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2)) - \omega(b_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2))}{\omega(u + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2)) - \omega(a_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2))}.$$

Die rechte Seite wird nämlich Null für $u = b_1$. Den Werth $\omega(b_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2))$ nimmt aber $\omega(u + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2))$ auch noch für $u = b_2$ an. Denn die Summe der Argumentwerthe, für welche $\omega(u)$ denselben Werth annimmt, ist $\equiv \alpha_1 + \alpha_2 \equiv \beta_1 + \beta_2$. Umgekehrt, sind u_1, u_2 zwei Argumentwerthe von u, deren Summe $u_1 + u_2 \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \equiv \beta_1 + \beta_2$ ist, so ist $\omega(u_1) = \omega(u_2)$, weil die Gleichung $\omega(u) = \omega(u_1)$ in einem Periodenparallelogramm nur zwei Wurzeln hat. Wird nun

$$u_1 = b_1 + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2), \quad u_2 = b_2 + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2)$$

gesetzt, so ist

$$u_1 + u_2 = b_1 + b_2 + \alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2 \equiv \alpha_1 + \alpha_2,$$

weil (§ 38) $b_1 + b_2 - a_1 - a_2 \equiv 0$ ist. Also wird die rechte Seite unserer Gleichung Null für b_1 und b_2, unendlich gross erster Ordnung für a_1 und (nach ganz analoger Schlussweise) für a_2. Der constante Factor lässt deshalb nach dem Obigen sich so einrichten, dass rechte und linke Seite gleich sind. Der Fall, in welchem w oder ω in einem Punkte unendlich gross **zweiter** Ordnung wird, macht keine besonderen Betrachtungen nöthig, es fallen dann nur entweder a_1 und a_2 zusammen, oder α_1 und α_2, und es kann auch beides zugleich geschehen. Der gewonnenen Darstellung kann noch die Form gegeben werden

$$w(u) = C + C \frac{\omega(a_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2)) - \omega(b_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2))}{\omega(u + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_2)) - \omega(a_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - a_1 - a_1))},$$

welche Form die Darstellung durch einen echten Bruch heissen mag. Wir sind so zu dem Satze gelangt.

Von zwei doppelt periodischen Functionen zweiter Ordnung lässt sich die eine linear durch die andere, nach Abänderung des Argumentes der letzteren um eine Constante, darstellen. Das Argument ist dasselbe, wenn die Summe der Argumentwerthe, für welche die Functionen verschwinden oder unendlich gross werden, in beiden dieselbe ist.

Eine doppelt periodische Function n^{ter} Ordnung lässt sich als Product von $n-1$ linearen Factoren durch eine doppelt periodische Function zweiter Ordnung mit denselben Perioden ausdrücken, wobei jedoch die Argumente der in den verschiedenen Linearfactoren enthaltenen Functionen um eine Constante von einander verschieden sind.

Die Punkte Unendlich der Function $w(u)$ n^{ter} Ordnung seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die Punkte Null $b_1, b_2, \ldots, b_n$, von denen auch einige zusammenfallen können, wenn $w(u)$ in höherer Ordnung verschwindet oder unendlich gross wird; $\omega(u)$ verschwinde in β_1, β_2 und werde unendlich gross in α_1, α_2. Dann ist

$$w(u) = C\frac{\omega(u+s_1)-\omega(b_1+s_1)}{\omega(u+s_1)-\omega(a_1+s_1)}\cdot\frac{\omega(u+s_2)-\omega(b_2+s_2)}{\omega(u+s_2)-\omega(a_3+s_2)}\cdots\cdot\frac{\omega(u+s_{n-1})-\omega(b_{n-1}+s_{n-1})}{\omega(u+s_{n-1})-\omega(a_n+s_{n-1})},$$

wenn $s_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-a_1-a_2)$, $s_2 = s_1+\frac{1}{2}(b_1-a_3)$, $s_3 = s_2+\frac{1}{2}(b_2-a_4), \ldots$ gesetzt wird. Sind die Punkte Unendlich sämmtlich einfach, so ergiebt sich auch noch eine einfache Darstellung von $w(u)$ durch $n-1$ ächte Brüche plus einer Constanten. Wird zur Abkürzung $\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-a_1-a_2) = t_1$, $\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-a_2-a_3) = t_2, \ldots, \omega(a\mu+t\mu) = \omega\mu$ gesetzt, so schreibe man

$$w(u) = C+\frac{A_1}{\omega(u+t_1)-\omega_1}+\frac{A_2}{\omega(u+t_2)-\omega_2}+\frac{A_3}{\omega(u+t_3)-\omega_3}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{\omega(u+t_{n-1})-\omega_{n-1}},$$

in welcher Summe immer zwei benachbarte Brüche einen Punkt Unendlich gemein haben. Nun richte man zuerst A_1 so ein, dass $\omega(u)$ und $A_1 : (\omega(u+t_1)-\omega_1)$ im Punkte a_1 dasselbe Residuum haben, wodurch A_1 eindeutig bestimmt ist. Sodann richte man A_2 so ein, dass $\omega(u)$ und $A_1 : (\omega(u+t_1)-\omega_1) + A_2 : (\omega(u+t_2)-\omega_2)$ im Punkte a_2 dasselbe Residuum haben, wodurch wieder A_2 eindeutig bestimmt ist; weiter richte man A_3 so ein, dass $w(u)$ und $A_2 : (\omega(u+t_2)-\omega_2) + A_3 : (\omega(u+t_3)-\omega_3)$ im Punkte a_3 dasselbe Residuum haben, und fahre so fort bis A_{n-1}. Dann ist

$$w(u)-\frac{A_1}{\omega(u+t_1)-\omega_1}-\frac{A_2}{\omega(u+t_2)-\omega_2}-\ldots-\frac{A_{n-1}}{\omega(u+t_{n-1})-\omega_{n-1}}$$

eine doppelt periodische Function, die nur in einem Punkte a_n unendlich gross werden könnte, folglich constant ist. Damit ist die Darstellbarkeit durch eine Summe von Brüchen erwiesen. — Wird die Function $w(u)$ in einzelnen Punkten unendlich gross zweiter Ordnung, so nehme man diese als zwei in der Reihe $a_1\, a_2 \ldots a_n$ benachbarte Punkte an. So ändert sich zwar die Bestimmung der A ein wenig, die Darstellung behält aber ihre Form. Würde jedoch $w(u)$ in höherer Ordnung unendlich, so müssten zur Darstellung in Bruchform Potenzen linearer Brüche herangezogen werden.

Hieraus geht hervor, dass eine Theorie der doppelt periodischen Functionen sich vorzüglich mit den Functionen zweiter Ordnung zu beschäftigen haben wird, weil sich alle übrigen durch diese ausdrücken lassen, und unter diesen wird man noch diejenigen vorziehen können, die man für die einfachsten hält. Auf die Existenz solcher Functionen kommen wir später.

§ 40. Beziehung zwischen einer doppelt periodischen Function zweiter Ordnung und ihrer Ableitung. Eine doppelt periodische Function zweiter Ordnung $w(u)$ mit den Punkten Unendlich a_1, a_2 und den Punkten Null b_1, b_2 steht zu ihrer Ableitung in der algebraischen Beziehung, dass das Quadrat der letzteren eine ganze Function von $w(u)$ im Allgemeinen vom vierten Grade, wenn a_1, a_2 aber zusammenfallen, vom dritten Grade ist. — Die Function $w(u+v)+w(u-v)$ wird in den Punkten a_1+v, a_2-v; a_1-v, a_2+v unendlich gross erster Ordnung, und es sind diese Punkte durch das Semicolon in zwei Paare so geordnet, dass die Summe der Werthe jedes Paares a_1+a_2 ist. Die Residuen aber in den einzelnen Punkten eines Paares sind entgegengesetzt gleiche. Deshalb lässt sich $w(u+v)+w(u-v)$ durch $w(u)$ ohne Abänderung des Argumentwerthes darstellen. Beachtet man noch, dass aus $w(a_1-v) = w(a_2+v)$ durch Differentiation folgt $w'(a_2+v) = -w'(a_1-v)$ und setzt man das Residuum von $w(u)$ im Punkte $a_1 = A_1$ (im Punkte $a_2 = -A_1$), so erkennt man ohne Weiteres die Richtigkeit der Gleichung

$$w(u+v)+w(u-v) = \frac{A_1 w'(a_1-v)}{w(u)-w(a_1-v)}+\frac{A_1 w'(a_1+v)}{w(u)-w(a_1+v)}+C,$$

und wenn man gleichnamig macht und zur Abkürzung

$$w_1+w_2 = (A_1 w'(a_1-v)+A_1 w'(a_1+v)+C w(a_1-v)+C w(a_1+v)) : C,$$
$$w_1 . w_2 = (C w(a_1-v) w(a_1+v) - A_1 w'(a_1-v) w(a_1+v) - A_1 w'(a_1+v) w(a_1-v)) : C$$

setzt,

$$w(u+v)+w(u-v)=C\cdot\frac{w(u)-w_1}{w(u)-w(a_1-v)}\cdot\frac{w(u)-w_2}{w(u)-w(a_1+v)}.$$

Der reciproke Werth von $w(u)$ ist ebenfalls doppelt periodisch und zweiter Ordnung, eine ganz analoge Schlussweise führt daher zu der Beziehung

$$\frac{1}{w(u+v)}+\frac{1}{w(u-v)}=\frac{w(u+v)+w(u-v)}{w(u+v)\,w(u-v)}=C''\frac{w(u)-w_1}{w(u)-w(b_1-v)}\cdot\frac{w(u)-w_2}{w(u)-w(b_1+v)},$$

worin w_1, w_2 dieselben Grössen als vorhin sind, weil die beiden betrachteten Functionen in denselben Punkten verschwinden. Multiplicirt man den reciproken Werth des letzten Ausdruckes mit $w(u+v)+w(u-v)$, so fliesst daraus die Gleichung

$$w(u+v)\,.\,w(u-v)=C'\frac{w(u)-w(b_1-v)}{w(u)-w(a_1-v)}\cdot\frac{w(u)-w(b_1+v)}{w(u)-w(a_1+v)},$$

und es sind daher $w(u+v)$, $w(u-v)$ die Wurzeln s_1, s_2 der Gleichung

$$W_0(u)s^2-2W_1(u)s+W_2(u)=0,\quad\text{wo}\quad W_0(u)=(w(u)-w(a_1-v))\,(w(u)-w(a_1+v)),$$
$$W_1(u)=\tfrac{1}{2}C(w(u)-w_1)\,(w(u)-w_2),\quad W_2(u)=(w(u)-w(b_1-v))\,(w(u)-w(b_1+v))$$

ist. Für die Differenz der Wurzeln ergiebt sich

$$w(u+v)-w(u-v)=2\sqrt{W_1(u)\,W_1(u)-W_0(u)\,W_2(u)}:W_0(u)$$

Der Ausdruck vierten Grades unter dem Wurzelzeichen zerlegt sich in ein Produkt von zwei Factoren, von denen der eine nicht von v, der andere nicht von u abhängt. Die linke Seite unserer Gleichung verschwindet nämlich allemal, wenn $w(u+v)=w(u-v)$, also wenn $(u+v)+(u-v)=2u\equiv a_1+a_2$ ist. Dies findet für vier einander incongruente Werthe statt, die wir mit σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 bezeichnen wollen, und zwar ist

$$\sigma_1=\tfrac{1}{2}(a_1+a_2),\quad \sigma_2=\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)+\pi_1,\quad \sigma_3=\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)+\pi_2,\quad \sigma_4=\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)+\pi_1+\pi_2.$$

Für diese Werthe muss der Ausdruck vierten Grades ebenfalls verschwinden, und folglich ist

$$W_1(u)\,W_1(u)-W_2(u)\,W_0(u)=c^2(v)\,.\,\overline{w(u)-w(\sigma_1)}\,.\,\overline{w(u)-w(\sigma_2)}\,.\,\overline{w(u)-w(\sigma_3)}\,.\,\overline{w(u)-w(\sigma_4)},$$

worin die der Bequemlichkeit halber in Form eines Quadrates geschriebene Grösse $c(v)\,c(v)$ die Variabele u nicht mehr enthält. Jeder Factor der rechten Seite verschwindet in einem Punkte σ zweimal, weil $2\sigma\equiv a_1+a_2$ ist, und so muss es ja auch sein, wenn die Quadratwurzel unendlich klein erster Ordnung werden soll. — Auf eine Discussion des Vorzeichens gehen wir jetzt nicht ein, bemerken nur, dass für zwei benachbarte Werthe von u, die nicht auf ein σ fallen, das Zeichen der Quadratwurzel bestimmt ist, wenn es für einen der beiden Werthe bestimmt ist, wegen der Stetigkeit. Denn nur einer der beiden Wurzelwerthe im zweiten Punkte ist von dem im ersten Punkte beliebig wenig verschieden. Bestimmt man noch c dadurch, dass man $u=b_1$ setzt, so folgt

(I.)
$$w(u+v)-w(u-v)=$$
$$\frac{(w(b_1+v)-w(b_1-v))\,w(a_1+v)\,w(a_1-v)}{\sqrt{w(\sigma_1)\,w(\sigma_2)\,w(\sigma_3)\,w(\sigma_4)}}\cdot\frac{\sqrt{(w(u)-w(\sigma_1))\,(w(u)-w(\sigma_2))\,(w(u)-w(\sigma_3))\,(w(u)-w(\sigma_4))}}{(w(u)-w(a_1-v))\,.\,(w(u)-w(a_1+v))}.$$

Fällt a_2 auf a_1, wird w in einem Punkte unendlich gross zweiter Ordnung, in welchem Falle $w(a_1-v)=w(a_1+v)$ ist, so sind zwar die Schlussmethoden etwas zu modificiren, indessen ist das Resultat aus dem gefundenen unmittelbar zu erhalten. Es ist dann $w(\sigma_1)=w(\frac{1}{2}(a_1+a_2))=w(a_1)=\infty$, und folglich (II.)

$$w(u+v)-w(u-v)=$$
$$\frac{w(b_1+v)-w(b_1-v)}{\sqrt{w(\sigma_2)\,w(\sigma_3)\,w(\sigma_4)}}\cdot\frac{\sqrt{(w(u)-w(\sigma_2))\,(w(u)-w(\sigma_3))\,(w(u)-w(\sigma_4))}}{1-\dfrac{w(u)}{w(a_1-v)}\,.\,1-\dfrac{w(u)}{w(a_1+v)}}.$$

Erhebt man (I.) und (II.) auf's Quadrat, so lässt sich die Richtigkeit der Gleichungen leicht a posteriori mittels der Sätze des § 39 verificiren.

Nehmen wir nun v unendlich klein an, so gehen (I.) und (II.) bez. über in (III.)

$$w'(u)=w'(b_1)\sqrt{(w(u)-w(\sigma_1))\,(w(u)-w(\sigma_2))\,(w(u)-w(\sigma_3))\,(w(u)-w(\sigma_4))}:\sqrt{w(\sigma_1)\,w(\sigma_2)\,w(\sigma_3)\,w(\sigma_4)},$$

(IV.)
$$w'(u)=w'(b_1)\sqrt{(w(u)-w(\sigma_2))\,(w(u)-w(\sigma_3))\,(w(u)-w(\sigma_4))}:\sqrt{w(\sigma_2)\,w(\sigma_3)\,w(\sigma_4)}.$$

Die Ableitung einer doppelt periodischen Function zweiter Ordnung ist eine doppelt periodische Function vierter bez. dritter Ordnung mit denselben Perioden. Ist $u_1 + u_2 = a_1 + a_2$, so ist

$$w(u_1) = w(u_2), \quad w'(u_1) = -w'(u_2).$$

§ 41. **Darstellung einer doppelt periodischen Function durch eine eben solche zweiter Ordnung und deren Ableitung.** Es sei zunächst $\omega(u)$ eine doppelt periodische Function zweiter Ordnung mit den Punkten Unendlich α_1, α_2, während w dieselben Perioden und die Punkte Unendlich a_1, a_2 hat. So können wir den Fall $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv a_1 + a_2$ als erledigt ausschliessen, weil nach § 36 sich unter dieser Voraussetzung ω schon durch w allein ohne die Ableitung darstellen lässt. Die Zahl γ werde so gewählt, dass weder $\alpha_1 + \gamma$ noch $\alpha_2 + \gamma$ congruent $a_1 + a_2$ noch gleich α_1 oder α_2 ist; sie kann auf einen der Werthe β_1, β_2 fallen, für welche ω verschwindet, wenn einer dieser Werthe die ausgesprochene Bedingung erfüllt. Alsdann lassen sich die Constanten A und B so bestimmen, dass

$$\omega(u) = \frac{A\,D(u)}{(w(u) - w(\alpha_1))\,(w(u) - w(\alpha_2))} + B, \quad D(u) = \begin{vmatrix} 1, & w(u), & w^2(u), & w'(u) \\ 1, & w(\gamma), & w^2(\gamma), & w'(\gamma) \\ 1, & w(\alpha_1), & w^2(\alpha_1), & -w'(\alpha_1) \\ 1, & w(\alpha_2), & w^2(\alpha_2), & -w'(\alpha_2) \end{vmatrix}$$

wird. Die Determinante $D(u)$ verschwindet nicht identisch, wenn α_1, α_2 ungleich sind, denn der Coefficient von $w(u)$ ist $w(\alpha_1) - w(\alpha_2) \,.\, w(\alpha_1) - w(\gamma) \,.\, w(\alpha_2) - w(\gamma)$, worin die Glieder jeder einzelnen Differenz nach der gemachten Voraussetzung verschieden sind. Setzt man

$$B = -A D(\beta_1) : (w(\beta_1) - w(\alpha_1))\,(w(\beta_2) - w(\alpha_2)),$$

(welcher Ausdruck verschwindet), wenn γ auf β_1 fällt, so verschwindet die rechte Seite unserer Gleichung für $\omega(u)$ im Punkte β_1 und deshalb nach § 38 auch im Punkte β_2. Beide Seiten können sich demnach nur durch einen constanten Factor unterscheiden, welcher entweder durch das Residuum in α_1, oder durch einen Werth von ω in einem speciellen Punkte zu bestimmen ist. Fallen jedoch α_2 und α_1 zusammen, so verschwindet $D(u)$ identisch. Es muss dann für diese Determinante eine andere eintreten, die im Punkte $a_1 + a_2 - \alpha_1$ nicht bloss selbst, sondern deren Ableitung auch noch in diesem Punkte verschwindet. Setzen wir in diesem Falle

$$D_1(u) = \begin{vmatrix} 1, & w(u), & w^2(u), & w'(u) \\ 1, & w(\gamma), & w^2(\gamma), & w'(\gamma) \\ 1, & w(\alpha_1), & w^2(\alpha_1), & -w'(\alpha_1) \\ 0, & w'(\alpha_1), & 2\,w(\alpha_1), w'(\alpha_1), & -w''(\alpha_1) \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich

$$\omega(u) = \frac{A\,D_1(u)}{(w(u) - w(\alpha_1))^2} - \frac{A\,D_1(\beta_1)}{(w(\beta_1) - w(\alpha_1))^2}.$$

Beide Ausdrücke sind in der Form enthalten

$$(A_0 + A_1 w(u) + A_2 w^2(u) + A_3 w'(u)) : (w(u) - w(\alpha_1))\,(w(u) - w(\alpha_2));$$

wenn aber α_2 auf a_2 fällt, wenn ω und w einen Punkt Unendlich gemein haben, so besteht der Nenner nur aus dem einen Factor $w(u) - w(\alpha_1)$.

Eine doppelt periodische Function n^{ter} Ordnung lässt sich durch $n-1$ Factoren nach § 39 darstellen, welche doppelt periodische Functionen zweiter Ordnung sind. Stellt man jeden Factor durch $w(u)$ und $w'(u)$ dar, multiplicirt aus und beachtet, dass jede gerade Potenz von $w'(u)$ eine ganze Function, jede ungerade Potenz eine ganze Function multiplicirt in $w'(u)$ ist, so erkennt man, dass eine Function n^{ter} Ordnung $\omega(u)$ in der Form darstellbar ist

$$(G_1(w(u)) + w'(u)\,G_2(w(u))) : G_3(w(u)),$$

worin G_1, G_2, G_3 ganze Functionen von $w(u)$ sind.

In ähnlicher Weise lässt sich die Ableitung von ω, die im Allgemeinen eine Function $2n^{\text{ter}}$ Ordnung sein wird, durch $w(u)$ und $w'(u)$ darstellen. Zwischen ω und w besteht eine in ω quadratische Gleichung, zwischen ω' und w besteht eine in ω' quadratische Gleichung; eliminirt man aus beiden w, so gelangt man zu dem Satze, *dass zwischen einer doppelt periodischen Function und ihrer Ableitung stets eine algebraische Beziehung besteht.*

§ 42. **Die doppelt periodische Grundfunction.** Da alle doppelt periodischen Functionen durch eine und deren Ableitung darstellbar sind, die man Grundfunction nennen mag, so wird man für die Wahl der letzteren eine solche aussuchen, die in irgend welcher Richtung als die möglichst einfache erscheint. Da aber der Begriff der Einfachheit einer Sache in den meisten Fällen ein subjectiver ist, so kann es nicht fehlen, dass der Eine diese, der Andere jene Function für die einfachste hält. Hier soll in dieser Beziehung die Legendre-Jacobi'sche Tradition festgehalten werden, unter dem Text aber sollen die Weierstrass'schen Formeln so weit Platz finden, dass der Leser sich in denselben, wenn er irgendwo auf sie stösst, zurecht findet. Zunächst nähern wir uns der Legendre'schen Grundfunction dadurch, dass wir eine mit dem Argument verschwindende Function $f(u)$ voraussetzen, deren Ableitung die Quadratwurzel eines Ausdruckes vierten Grades ist, der nur **gerade Potenzen** von f enthält*) und von der wir erweisen, dass sie eine ungerade ist. Ist einmal $F(u)$ eine gerade Function von w, ein andermal eine ungerade Function von w, so folgt aus der Gleichung

$$F'(u) = dF(u):du = w'(u)dF:dw,$$

dass im ersten Falle F' eine ungerade, im zweiten eine gerade Function von w ist, und es sind deshalb die ungeraden Ableitungen von f nach u gerade, die geraden Ableitungen ungerade Functionen von f, und weil die letzteren mit u verschwinden, so lässt sich f nach ungeraden Potenzen von u entwickeln, wenn diese Function in der Umgebung des Punktes Null regulär ist, was vorausgesetzt wird. Also ist $f(u)$ ungerade, $f(-u) = -f(u)$.

Später ergiebt sich, dass das Quadrat von $f(u)$ eine doppelt periodische Function ist, deren eine Periode die Hälfte der entsprechenden von f ist. Der Theorie der Thetafunctionen steht im Grunde dieses Quadrat näher, als f selbst, weshalb wir den Perioden von f die Form $4\pi_1$, $2\pi_2$ geben.

Wird $f(u)$ im Punkte a_1 unendlich gross, so wird $f(u) = -f(-u)$ auch im Punkte $-a_1$ unendlich gross. Dieser Punkt $-a_1$ kann aber nicht dem zweiten Punkte Unendlich a_2 im Elementarparallelogramm congruent sein. Denn in diesem Falle wäre die Summe der Argumente u, für welche die Function f denselben Werth in einem Elementarparallelogramm annimmt, $\equiv 0\,(4\pi_1, 2\pi_2)$, und es müsste der zweite Punkt Null mit dem ersten $u = 0$ zusammenfallen. Eine ungerade Function von u kann aber offenbar für $u = 0$ nicht unendlich klein zweiter Ordnung und nur zweiter Ordnung werden. Es muss demnach $-a_1 \equiv a_1$, $-a_2 \equiv a_2$ sein, woraus folgt, dass die Punkte Unendlich auf zwei von den drei Werthen $2\pi_1$, π_2, $2\pi_1 + \pi_2$ fallen müssen. Von diesen Werthen ist die Summe zweier dem dritten congruent, deshalb muss der Werth, für den u nicht unendlich wird, der zweite Punkt Null sein, weil $b_1 + b_2 = 0 + b_2 \equiv a_1 + a_2$, $[b_2 \equiv a_1 + a_2$ ist. Nun ist $2\pi_1 + \pi_2$ ebenfalls eine halbe Periode von f, und es lässt sich deshalb in jedem Falle die Bezeichnung so wählen, dass $f(2\pi_1) = 0$, und dass $f(\pi_2)$, $f(2\pi_1 + \pi_2) = \infty$ wird, welche Annahme gemacht werde. Die Summe der Argumente, für welche $f(u)$ denselben Werth in einem Elementarparallelogramm annimmt, ist dann congruent $2\pi_1$, woraus $f(2\pi_1 - u) = f(u)$ und weiter

$$f(u) = f(2\pi_1 - u) = -f(u - 2\pi_1) = -f(u - 2\pi_1 + 4\pi_1) = -f(u + 2\pi_1),\ \ f(u + 2m\pi_1) = (-1)^m f(u)$$

folgt. Die Werthe, die wir im § 40 mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ bezeichneten, sind bez. π_1, $3\pi_1$, $\pi_1 + \pi_2$, $3\pi_1 + \pi_2$, und es ist $f(\sigma_2) = -f(\sigma_1)$, $f(\sigma_4) = -f(\sigma_3)$. Die Beziehung zwischen $f(u)$ und $f'(u)$ gewinnt deshalb die Gestalt

$$f'(u) = f'(0)\sqrt{\left(1 - \frac{f^2(u)}{f^2(\pi_1)}\right)\left(1 - \frac{f^2(u)}{f^2(\pi_1 + \pi_2)}\right)}.$$

Die Function $f(\pi_2 + u)$ wird ∞ für $u = 0$ und $u = 2\pi_1$, und 0 für $u = \pi_2$ und $u = 2\pi_1 + \pi_2$, woraus fliesst $f(u) \,.\, f(u + \pi_2) = \text{Const.}$ Die Constante ergiebt sich für $u = \frac{1}{2}\pi_2$,

$$\text{Const.} = f(\tfrac{1}{2}\pi_2)\, f(\tfrac{1}{2}\pi_2 + \pi_2) = f(\tfrac{1}{2}\pi_2)\, f(\tfrac{1}{2}\pi_2 + \pi_2 - 2\pi_2) = f(\tfrac{1}{2}\pi_2)\, f(-\tfrac{1}{1}\pi_2) = -f^2(\tfrac{1}{2}\pi_2),$$

so dass man hat $\quad f(\pi_2 + u) = -f^2(\frac{1}{2}\pi_2) : f(u)$, $\ f(\pi_2 - u) = f^2(\frac{1}{2}\pi_2) : f(u)$.

Wir vereinfachen die Beziehung zwischen der Grundfunction und ihrer Ableitung noch dadurch ein wenig, dass wir ihr, die wir dann mit $S(u)$ bezeichnen wollen, einen gewissen Factor geben, und

---

*) Die Grundfunction des Herrn Weierstrass wird mit verschwindendem u unendlich gross zweiter Ordnung und steht zu ihrer Ableitung in der Beziehung $p'(u) = \sqrt{(4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3)}$.

eine Grösse k als Abkürzung einführen mittels der Gleichungen

$$f(u) = f(\pi_1)S(u), \quad 1 : S^2(\pi_1 + \pi_2) = k^2, \quad S(\pi_1) = 1.$$

Alsdann ist diese Beziehung

$$S'(u) = S'(0)\sqrt{(1 - S^2(u))(1 - k^2 S^2(u))} = S'(0)\,C(u)\,D(u), \quad C(u) = \sqrt{(1 - S^2(u))}, \quad D(u) = \sqrt{(1 - k^2 S^2(u))}.$$

Für k^2 gewinnen wir noch einen andern wichtigen Ausdruck durch Differentiation der Gleichung

$$S(u) = -S^2(\tfrac{1}{2}\pi_2) : S(\pi_2 + u)$$

nach u. Die Differentiation giebt nach Forthebung des gemeinsamen Factors $S'(0)$

$$\sqrt{(1 - S^2(u))(1 - k^2 S^2(u))} = -S^2(\tfrac{1}{2}\pi_2)\sqrt{(1 - S^2(\pi_2 + u))(1 - k^2 S^2(\pi_2 + u))} : (S^2(\pi_2 + u)).$$

Hebt man diese Gleichung aufs Quadrat und setzt $u = 0$, so entspringen aus ihr die Beziehungen

$$1 = S^4(\tfrac{1}{2}\pi_2)k^2, \quad S^4(\tfrac{1}{2}\pi_2) = S^2(\pi_1 + \pi_2) = 1 : k^2, \quad S(\pi_2 + u)\,S(\pi_2 - u) = -1 : k^2 S^2(u).$$

§ 43. **Additionstheorem der Grundfunction.** Ersetzen wir in der Formel (I.) des § 40 w durch S, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} &S(u+v) - S(u-v) \\ &= 2S(v)\,S(\pi_2 + v)\,S(\pi_2 - v)\sqrt{(1 - S^2(u))(1 - k^2 S^2(u))} : (S(u) - S(\pi_2 - v))\,(S(u) - S(\pi_2 + v)) \\ &= 2S(v)\,S'(u)\,S(\pi_2 + v)\,S(\pi_2 - v) : S'(0)\,(S^2(u) + S(\pi_2 + v)\,S(\pi_2 - v)) = 2S(v)\,S'(u) : (1 - k^2 S^2(u)\,S^2(v))\,S'(0), \end{aligned}$$

und wenn man u mit v vertauscht,

$$S(u+v) + S(u-v) = 2S(u)\,S'(v) : S'(0)\,(1 - k^2 S^2(u)\,S^2(v)).$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man das Additionstheorem

$$S(u+v) = \frac{1}{S'(0)}\,\frac{S(u)S'(v) + S(v)S'(u)}{1 - k^2 S^2(u)\,S^2(v)} = \frac{1}{S'(0)}\,\frac{S(u)\,C(v)\,D(v) + S(v)\,C(u)\,D(u)}{1 - k^2 S^2(u)\,S^2(v)}.$$

Da $S'(u)$, $S'(v)$ algebraische Functionen von $S(u)$ bez. $S(v)$ sind, so sagt dies aus, dass die doppelt periodische Function S ein **algebraisches** Additionstheorem besitzt, d. h. es lässt sich $S(u+v)$ algebraisch durch $S(u)$ und $S(v)$ ausdrücken.

§ 44. **Existenz der doppelt periodischen Function $S^2(u)$.** Es lässt sich die Function $S(u)$ durch eine zweifach unendliche convergente Partialbruchreihe wirklich darstellen, womit die Existenz derselben erwiesen ist. Die Darstellung des Quadrates dieser Function, welche, weil $S(u + 2\pi_1) = -S(u)$ ist, die Elementarperioden $2\pi_1$, $2\pi_2$ und den zweifachen Punkt Unendlich π_2, den zweifachen Punkt Null 0 hat, ist jedoch etwas einfacher, weshalb wir diese geben.

Die unendliche Partialbruchreihe*)

$$\begin{aligned} w(u) &= \overline{\mathfrak{S}}_{m_1}\overline{\mathfrak{S}}_{m_2}\left(\frac{1}{(u - \pi_2 - 2m_1\pi_1 - 2m_2\pi_2)^2} - \frac{1}{(\pi_2 + 2m_1\pi_1 + 2m_2\pi_2)^2}\right) \\ &= \overline{\mathfrak{S}}_{m_1}\overline{\mathfrak{S}}_{m_2}\,\frac{u(2\pi_2 + 4m_1\pi_1 + 4m_2\pi_2 - u)}{(u - \pi_2 - 2m_1\pi_1 - 2m_2\pi_2)^2\,(\pi_2 + 2m_1\pi_1 + 2m_2\pi_2)^2} \end{aligned}$$

convergirt, wenn $\pi_2 : \pi_1$ nicht reell ist, für jeden Werth von u absolut, sofern u nicht auf einen Punkt

---

*) Nach Herrn Weierstrass ist, wenn in der Summation das Glied $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ unterdrückt wird,

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \overline{\mathfrak{S}}_{m_1}\overline{\mathfrak{S}}_{m_2}\left(\frac{1}{(u - 2m_1\pi_1 - 2m_2\pi_2)^2} - \frac{1}{(2m_1\pi_1 + 2m_2\pi_2)^2}\right)$$

die einfachste doppelt periodische Function. Dieselbe ist **gerade**, wird für $u = 0$ unendlich gross zweiter Ordnung, $p(u) - (1 : u^2)$ verschwindet für $u = 0$, so dass in der Entwickelung nach geraden Potenzen von u die 0te Potenz fehlt Es wird $p(\pi_1) = e_1$, $p(\pi_2) = e_2$, $p(\pi_3) = p(\pi_1 + \pi_2) = e_3$ gesetzt, und aus der Betrachtung der Partialbruchreihe geschlossen, dass

$$p(\pi_1) + p(\pi_2) + p(\pi_3) = e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

ist. Die Function $p(u)$ hängt mit einer Function $\sigma(u)$ zusammen, deren zweiter negativer logarithmischer Differentialquotient sie ist. Dieser Zusammenhang wird vermittelt, und $\sigma(u)$ definirt, durch die Gleichungen

$$p(u) = -\frac{d^2 \lg \sigma(u)}{du^2}, \quad \sigma(u) = u\,\Pi'\left(1 - \frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \quad \sigma(-u) = -\sigma(u),$$

worin Π' ein unendliches Product bedeutet, von welchem ein Factor angegeben ist. In ihm bedeutet w den Ausdruck $2m_1\pi_1 + 2m_2\pi_2$, und m_1, m_2 durchlaufen alle ganzen positiven und negativen Zahlen; nur die Combination $m_1 = 0$,

fällt, der Pol eines Termes der Reihe ist, auf einen Werth, für welchen ein Glied der Reihe unendlich gross wird. Eine solche Reihe darf gliedweise differenzirt werden, woraus folgt, dass $w(u)$ eine Function der complexen Variabeln u in unserm Sinne ist, die unendlich viele, aber einzeln liegende Pole besitzt. Sie wird überall unendlich gross zweiter Ordnung, wo $S^2(u)$ ebenso unendlich gross wird, und ihr erstes Residuum ist in jedem Pole wie bei $S^2(u)$ Null. Für $u = 0$ verschwindet sie selbst, und auch ihr erster Differentialquotient, wie man aus der Reihe abliest, sie wird also dort wie $S^2(u)$ unendlich klein zweiter Ordnung. Wird nachgewiesen, dass $w(u)$ die Perioden $2\pi_1$, $2\pi_2$ besitzt, so folgt $w(u) = \text{Const.}\, S^2(u)$ nach § 39, und die Existenz der Grundfunction ist constatirt. Diese Periodicität lässt sich unschwer an der Reihe direct nachweisen. Wir können aber auch eine der beiden Summationen ausführen und der Reihe dadurch eine Form geben, in der die Periodicität unmittelbar ersichtlich ist. Setzen wir $\pi_1 = \mu_1\pi'_1 + \mu_2\pi'_2$, $\pi_2 = \nu_1\pi'_1 + \nu_2\pi'_2$, wo $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = 1$ ist, so dass $\pi'_1 = \pi_1\nu_2 - \pi_2\mu_2$, $\pi'_2 = -\nu_1\pi_1 + \mu_1\pi_2$ wird, so folgt

$$m_1\pi_1 + m_2\pi_2 = (m_1\mu_1 + m_2\nu_1)\pi'_1 + (m_1\mu_2 + m_2\nu_2)\pi'_2 = m'_1\pi'_1 + m'_2\pi'_2.$$

Die Grössen $m'_1 = m_1\mu_1 + m_2\nu_1$, $m'_2 = m_1\mu_2 + m_2\nu_2$ durchlaufen alle ganzen positiven und negativen Zahlen, wenn m_1, m_2 diese durchlaufen, und umgekehrt. Deshalb kann man schreiben

$$w(u) = \overline{\mathfrak{S}}_{m'_1}\overline{\mathfrak{S}}_{m'_2}\left(\frac{1}{(\pi_2 - u + 2m'_1\pi'_1 + 2m'_2\pi'_2)^2} - \frac{1}{(\pi_2 + 2m'_1\pi'_1 + 2m'_2\pi'_2)^2}\right).$$

Die zweite Summation führen wir mittels einer Formel aus, die wir aus einer im § 25 enthaltenen Partialbruchreihe für die Tangente, oder, wenn wir dort $h + c$ für h setzen, für die Cotangente durch Differentiation erhalten, nämlich mittels der Formel

$$\frac{\pi^2}{4c^2 \sin^2 \dfrac{\pi(z-h)}{2c}} = \overline{\mathfrak{S}}_m \frac{1}{(h - z + 2mc)^2}.$$

Wird $\pi_2 - u + 2m'_1\pi'_1$ für $z - h$ gesetzt, so fliesst daraus

$$w(u) = \frac{\pi^2}{4\pi'_2\pi'_2}\overline{\mathfrak{S}}_{m'_1}\left(\frac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi(u - \pi_2 + 2m'_1\pi'_1)}{2\pi'_2}} - \frac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi(2m'_1\pi'_1 - \pi_2)}{2\pi'_2}}\right),$$

aus welcher Form unmittelbar hervorgeht, dass $w(u)$ die Periode $2\pi'_2 = -\nu_1\pi_1 + \mu_1\pi_2$ hat. Setzt man einmal $\nu_1 = 1$, $\mu_1 = 0$, ein andermal $\nu_1 = 0$, $\mu_1 = 1$, so erkennt man, dass $w(u)$ die Perioden $2\pi_1$, $2\pi_2$ besitzt, w. z. b. w.

§ 45. **Darstellung der Grundfunction durch unendliche Producte.** Von mächtigerem Einfluss als die Darstellung durch Partialbrüche ist auf die Entwickelung der Theorie der doppelt periodischen Functionen die Darstellung durch Factorenfolgen gewesen, weil sie zu den Thetafunctionen geführt hat. Im § 26 sind die Mittel enthalten, die Function $S^2(u)$ durch den Grenzwerth eines Productes darzustellen, dessen einzelne Factoren die Form haben

$$\left(1 - \frac{u}{2n_1\pi_1 + 2n_2\pi_2}\right)^2 : \left(1 - \frac{u}{2n_1\pi_1 + (2n_2+1)\pi_2}\right)^2,$$

die sich für $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ dahin ändert, dass an die Stelle des Zählers u^2 tritt. Dieses Grenzproduct darf nicht ohne Weiteres als zweifach unendliches Product aufgefasst werden, weil es nicht absolut convergent, sondern von der Factorenordnung abhängig ist, und wenn man das Product über einen der beiden Indices, etwa n_1, ausführen will, so ist eine nebenhergehende Betrachtung des kritischen, die Annäherung bestimmenden Integrales unerlässlich. Wir vermeiden diese Untersuchung, indem wir das Product über einen Index mittels bekannter Factorendarstellung der Sinusfunction zwar ausführen, aber die Richtigkeit a posteriori erweisen. Es findet sich auf diese Weise

---

$m_2 = 0$ ist ausgeschlossen, was durch den Strich am Productzeichen angedeutet wird. $\sigma'(\pi_1):\sigma(\pi_1)$ wird durch η_1, $\sigma'(\pi_2):\sigma(\pi_2)$ durch η_2, $\sigma'(\pi_3):\sigma(\pi_3)$ durch η_3 abgekürzt (bei Weierstrass η, η', η''). Der Zusammenhang der Function σ mit den Thetafunctionen wird später gegeben. Die in den Anmerkungen eingeführten Abkürzungen sollen keine Giltigkeit für den Text haben. Zu bemerken ist noch, dass hier π_1 für $\bar\omega$, π_2 für $\bar\omega'$, π_3 für $\bar\omega''$ gesetzt ist.

$$S^2(u) = \text{Const.}\, sin^2\frac{u\pi}{2\varkappa_1}\, \mathfrak{P}\left(1-\frac{sin^2\frac{u\pi}{2\varkappa_1}}{sin^2\frac{n\pi\varkappa_2}{\varkappa_1}}\right)^2 : \mathfrak{P}\left(1-\frac{sin^2\frac{u\pi}{2\varkappa_1}}{sin^2\frac{(2n+1)\pi\varkappa_2}{2\varkappa_1}}\right)^2,$$

wo die Producte des Zählers und Nenners getrennt werden konnten, weil sie beide absolut convergent sind.*) — Die Punkte Null und Punkte Unendlich stimmen beiderseits überein, auch ist die Periodicität in Bezug auf den Modul $2\varkappa_1$ evident. Dass sie auch in Bezug auf $2\varkappa_2$ vorhanden ist, wird in den folgenden Paragraphen erwiesen werden. Die Darstellung lehrt aber auch, dass die Quadratwurzel $S(u)$ eine einwerthige Function von u ist. — Die unendlichen Factorenfolgen des Zählers und Nenners von $S(u)$ sind es, die man Thetafunctionen nennt, sie sind ganze transcendente Functionen. Die nahe, sich später ergebende Beziehung zwischen Zähler und Nenner ist der Grund, dass man beide mit denselben Buchstaben bezeichnet und sie durch Indices unterscheidet. Da die Functionen $C(u)$, $D(u)$ ähnlich behandelt noch zwei solche Functionen liefern, so machen sich vier Indices nöthig. Zunächst definiren wir zwei dieser Functionen durch die Gleichungen

$$\frac{\Theta_{11}(u)}{\Theta'_{11}(0)} = \frac{2\varkappa_1}{\pi} sin\frac{u\pi}{2\varkappa_1}\,\mathfrak{P}\left(1-\frac{sin^2\frac{\pi u}{2\varkappa_1}}{sin^2\frac{n\pi\varkappa_2}{\varkappa_1}}\right),\quad \frac{\Theta_{01}(u)}{\Theta_{01}(0)} = \mathfrak{P}\left(1-\frac{sin^2\frac{\pi u}{2\varkappa_1}}{sin^2\frac{(2n+1)\pi\varkappa_2}{2\varkappa_1}}\right),$$

welche Functionen in $S(u)$ als Zähler und Nenner enthalten sind.

§ 46. Formen der die Thetafunctionen darstellenden Producte. So lange man sich mit den Thetafunctionen allein, ohne Rücksicht auf die doppelt periodischen Functionen, beschäftigt, pflegt man die Bezeichnung etwas dadurch zu vereinfachen, dass man das Argument 0 und meist auch das Indexpaar 0,0 unterdrückt und

$z = -u\pi i : 2\varkappa_1,\quad u = 2i\varkappa_1 z : \pi,\quad lg\, q = \tau = i\pi\varkappa_2 : \varkappa_1,\quad \Theta_{hg}(u) = \vartheta_{hg}(-ui\pi : 2\varkappa_1) = \vartheta_{hg}(z),\quad \Theta_{hg} = \vartheta_{hg}$

setzt. Behält man im Auge, dass dies nur Abkürzungen sind, so ist es unverfänglich, beide Bezeichnungen in derselben Zeile oder Gleichung vorkommen zu lassen. Wir transformiren zuerst die Darstellung der Function $\Theta_{01}(u)$. Es ist

$$\frac{\Theta_{01}(u)}{\Theta_{01}} = \frac{\vartheta_{01}(z)}{\vartheta_{01}} = \mathfrak{P}\left(1-\frac{sin^2\frac{\pi u}{2\varkappa_1}}{sin^2\frac{(2n+1)\pi\varkappa_2}{2\varkappa_1}}\right) = \mathfrak{P}\,\frac{sin\left(\frac{(2n+1)\pi\varkappa_2}{2\varkappa_1}-\frac{u\pi}{2\varkappa_1}\right)}{sin\frac{(2n+1)\pi\varkappa_2}{2\varkappa_1}}\cdot\frac{sin\left(\frac{(2n+1)\pi\varkappa_2}{2\varkappa_1}+\frac{u\pi}{2\varkappa_1}\right)}{sin\frac{(2n+1)\pi\varkappa_2}{2\varkappa_1}}$$

$$= \mathfrak{P}\,\frac{e^{\frac{2n+1}{2}\tau+z}-e^{-\frac{2n+1}{2}\tau-z}}{e^{\frac{2n+1}{2}\tau}-e^{-\frac{2n+1}{2}\tau}}\cdot\frac{e^{\frac{2n+1}{2}\tau-z}-e^{-\frac{2n+1}{2}\tau+z}}{e^{\frac{2n+1}{2}\tau}-e^{-\frac{2n+1}{2}\tau}} = \mathfrak{P}\,\frac{1-e^{2z}q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\cdot\frac{1-e^{-2z}q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$$

$$= \mathfrak{P}\,\frac{1-2q^{2n+1}cos\frac{\pi u}{\varkappa_1}+q^{4n+2}}{(1-q^{2n+1})^2},$$

wo von der Formel

$$sin^2\alpha - sin^2\beta = sin(\alpha-\beta)\,sin(\alpha+\beta)$$

Gebrauch gemacht worden ist.

Vermehrt man hierin z um $\frac{1}{2}i\pi$ oder u um $-\varkappa_1$, so bezeichnet man die resultirende Function mit $\Theta_{00}(u) = \Theta(u) = \vartheta_{00}(z) = \vartheta(z)$ und erhält für sie die Darstellung

---

*) Ist $F(u) = \mathfrak{P}(1-\varphi_n(u))$ ein absolut convergentes Product, und ist $\varphi_n(u)$ regulär in der Umgebung von u, für welchen Punkt kein Factor verschwindet, so ist $lg\, F(u) = \mathfrak{S}\, lg(1-\varphi_{m+1}(u))$ eine absolut convergente Reihe, die gliedweise differenzirt werden darf. Daraus folgt, dass $F'(u) : F(u)$ von der Richtung der Differentiation unabhängig, und also $F(u)$ eine Function der complexen Veränderlichen u ist.

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta_{01}} = \frac{\vartheta(z)}{\vartheta_{01}} = \mathfrak{P}\,\frac{1+e^{2z}q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\cdot\frac{1+e^{-2z}q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} = \mathfrak{P}\,\frac{1+2q^{2n+1}\cos\frac{\pi u}{\pi_1}+q^{4n+2}}{(1-q^{2n+1})^2}.$$

Wird die Darstellung der Function $\Theta_{11}(u)$ des vorigen Paragraphen in ähnlicher Weise wie die von $\Theta_{01}(u)$ transformirt, so erhält man für sie eine Form, welche unmittelbar erkennen lässt, dass $\Theta_{11}(u):\Theta'_{11}$ der Function

$$e^{\frac{-u\pi i}{2\pi_1}}\,\Theta_{01}(u-\pi_2) = e^{\frac{-u\pi i}{2\pi_1}}\,\Theta(u-\pi_2-\pi_1)$$

proportional ist. Vermehrt man nochmals u um π_1, so erhält man eine Function, die $\Theta_{10}(u)$ proportional gesetzt wird. Damit haben wir die vier Thetafunctionen, auf welche sich nun die Behandlung der doppelt periodischen Functionen wesentlich stützt. Um aber über das Verhältniss der constanten Factoren in diesen Functionen eine feste Verfügung zu treffen, stellen wir die Gleichungen auf

$$\text{I)}\begin{cases}\vartheta_{01}(z)=\vartheta(z+\tfrac{1}{2}i\pi), & \vartheta_{10}(z)=e^{z+\frac{1}{4}\tau}\vartheta(z+\tfrac{1}{2}\tau), & \vartheta_{11}(z)=ie^{z+\frac{1}{4}\tau}\vartheta(z+\tfrac{1}{2}i\pi+\tfrac{1}{2}\tau).\\ \Theta_{01}(u)=\Theta(u-\pi_1), & \Theta_{10}(u)=e^{\frac{-ui\pi}{2\pi_1}+\frac{1}{4}\tau}\Theta(u-\pi_2), & \Theta_{11}(u)=ie^{\frac{-ui\pi}{2\pi_1}+\frac{1}{4}\tau}\Theta(u-\pi_1-\pi_2).\end{cases}$$

Einen gemeinsamen von u oder z unabhängigen Factor bezeichnen wir durch $\mathfrak{D}$, und stellen die vier Thetafunctionen, indem wir diesen Factor einstweilen willkürlich lassen, noch einmal, durch unendliche Producte ausgedrückt, zusammen.

$$\text{II)}\begin{cases}\Theta(u)=\vartheta(z)=\vartheta_{00}(z)=\mathfrak{D}\,\mathfrak{P}(1+q^{2n+1}e^{2z})(1+q^{2n+1}e^{-2z})=\mathfrak{D}\,\mathfrak{P}\Big(1+2q^{2n+1}\cos\frac{\pi u}{\pi_1}+q^{2(2n+1)}\Big),\\ \Theta_{01}(u)=\vartheta_{01}(z)=\mathfrak{D}\,\mathfrak{P}(1-q^{2n+1}e^{2z})(1-q^{2n+1}e^{-2z})=\mathfrak{D}\,\mathfrak{P}\Big(1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi u}{\pi_1}+q^{2(2n+1)}\Big),\\ \Theta_{10}(u)=\vartheta_{10}(z)=\mathfrak{D}\,e^{\frac{1}{4}\tau}(e^z+e^{-z})\,\mathfrak{P}(1+q^{2n+2}e^{2z})(1+q^{2n+2}e^{-2z})\\ \qquad=2\mathfrak{D}\sqrt[4]{q}\cos\frac{u\pi}{2\pi_1}\,\mathfrak{P}\Big(1+2q^{2n+2}\cos\frac{u\pi}{\pi_1}+q^{4n+4}\Big),\\ \Theta_{11}(u)=\vartheta_{11}(z)=i\mathfrak{D}\,e^{\frac{1}{4}\tau}(e^z-e^{-z})\,\mathfrak{P}(1-q^{2n+2}e^{2z})(1-q^{2n+2}e^{-2z})\\ \qquad=2\mathfrak{D}\sqrt[4]{q}\sin\frac{u\pi}{2\pi_1}\,\mathfrak{P}\Big(1-2q^{2n+2}\cos\frac{u\pi}{\pi_1}+q^{4n+4}\Big).\end{cases}$$

Aus diesen Darstellungen wird sogleich erkannt, dass $\vartheta(z)$, $\vartheta_{01}(z)$, $\vartheta_{10}(z)$ gerade Functionen von z sind, $\vartheta_{11}(z)$ eine ungerade Function von z ist. Die Θ verhalten sich in Bezug auf u ebenso. — Mit Rücksicht auf I) ergiebt eine einfache Rechnung die folgenden Tabellen:

$$\text{III)}\begin{cases}\vartheta(\tfrac{1}{2}i\pi)=\vartheta_{01}, & \vartheta_{01}(\tfrac{1}{2}i\pi)=\vartheta, & \vartheta_{10}(\tfrac{1}{2}i\pi)=0, & \vartheta_{11}(\tfrac{1}{2}i\pi)=-\vartheta_{10},\\ \vartheta(\tfrac{1}{2}\tau)=e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{10}, & \vartheta_{01}(\tfrac{1}{2}\tau)=0, & \vartheta_{10}(\tfrac{1}{2}\tau)=e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta, & \vartheta_{11}(\tfrac{1}{2}\tau)=-ie^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{01},\\ \vartheta(\tfrac{1}{2}\tau+\tfrac{1}{2}i\pi)=0, & \vartheta_{01}(\tfrac{1}{2}\tau+\tfrac{1}{2}i\pi)=e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{10}, & \vartheta_{10}(\tfrac{1}{2}\tau+\tfrac{1}{2}i\pi) & \vartheta_{11}(\tfrac{1}{2}\tau+\tfrac{1}{2}i\pi)\\ & & \quad=-ie^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{01}, & \quad=-e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta.\end{cases}$$

$$\text{IV)}\begin{cases}\Theta(\pi_1)=\Theta_{01}, & \Theta_{01}(\pi_1)=\Theta, & \Theta_{10}(\pi_1)=0, & \Theta_{11}(\pi_1)=\Theta_{10},\\ \Theta(\pi_2)=\Theta_{10}:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{01}(\pi_2)=0, & \Theta_{10}(\pi_2)=\Theta:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{11}(\pi_2)=i\Theta_{01}:\sqrt[4]{q},\\ \Theta(\pi_1+\pi_2)=0, & \Theta_{01}(\pi_1+\pi_2)=\Theta_{10}:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{10}(\pi_1+\pi_2)=-i\Theta_{01}:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{11}(\pi_1+\pi_2)=\Theta:\sqrt[4]{q}.\end{cases}$$

Setzt man z. B. in I) $z=-\frac{1}{2}\tau$, so ist $\vartheta_{10}(-\frac{1}{2}\tau)=\vartheta_{10}(\frac{1}{2}\tau)=e^{-\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{4}\tau}\vartheta=e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta$, und $\vartheta_{11}(-\frac{1}{2}\tau)=-\vartheta_{11}(\frac{1}{2}\tau)=ie^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta(\frac{1}{2}i\pi)=ie^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{01}$, u. s. w. — Die Convergenz der unendlichen Producte ist an die Bedingung geknüpft, dass $abs\, q<1$ sei, also dass $i\pi\pi_2:\pi_1=\tau$ einen negativ reellen Theil besitze. Da bei jeder doppelt periodischen Function, die nicht constant ist, nach § 34 das Verhältniss complex ist, so hat τ stets einen reellen Theil. Dieser ist negativ, wenn die Periodenindices oder die Vorzeichen der Perioden so gewählt werden, dass der Inhalt des Periodenparallelogrammes

$$4\, abs\,\pi_1\,.\, abs\,\pi_2\,.\, \sin arc\,(\pi_2:\pi_1)$$

positiv ist, welche Annahme wir schon früher machten. Man pflegt τ den Modul der Thetafunctionen zu nennen und deutet ihn, wenn nöthig, durch die Schreibweise $\vartheta(z,\tau)$ an.

§ 47. **Functionalgleichungen und Reihendarstellungen der Thetafunctionen.** Aus der Darstellung
$$\vartheta(z) = \mathfrak{D}\mathfrak{P}(1+e^{2z}q^{2n+1})(1+e^{-2z}q^{2n+1})$$
geht ohne Weiteres hervor, dass $\vartheta(z)$ die Periode $i\pi$ hat, dass $\vartheta(z+i\pi) = \vartheta(z)$ ist. Ersetzen wir aber z durch $z+\tau$, so folgt
$$\vartheta(z) = \mathfrak{D}\mathfrak{P}(1+e^{2z}q^{2n+3})(1+e^{-2z}q^{2n-1})$$
$$= \frac{1+q^{-1}e^{-2z}}{1+qe^{2z}}\mathfrak{D}\mathfrak{P}(1+e^{2z}q^{2n+1})(1+e^{-2z}q^{2n+1}) = e^{-2z}q^{-1}\vartheta(z).$$
Multiplicirt man die hieraus entspringenden Gleichungen
$$\vartheta(z+\tau) = e^{-2z-\tau}\vartheta(z),\quad \vartheta(z+2\tau) = e^{-2z-3\tau}\vartheta(z+\tau),\ \ldots\ \vartheta(z+\mu\tau) = e^{-2z-(2\mu-1)\tau}\vartheta(z+\overline{\mu-1}\tau)$$
mit einander, so ergiebt sich $\qquad \vartheta(z+\mu\tau) = e^{-2\mu z-\mu\mu\tau}\vartheta(z).$

Es ist τ keine eigentliche Periode, aber die Vermehrung von z um τ bewirkt doch eine Wiedererzeugung der Function $\vartheta(z)$ multiplicirt mit einem Exponentialfactor. Wir wollen deshalb diese Grösse die uneigentliche Periode nennen. Definiren wir $\vartheta_{hg}(z)$ oder $\Theta_{hg}(u)$ durch die Gleichungen
$$\vartheta_{hg}(z) = \vartheta(z+\tfrac{1}{2}h\tau+\tfrac{1}{2}gi\pi)e^{\frac{1}{4}\tau h^2+hz+\frac{1}{2}hgi\pi},$$
$$\Theta_{hg}(u) = e^{\frac{1}{4}h^2\tau-\frac{hui\pi}{2\pi_1}+\frac{1}{2}hgi\pi}\,\Theta(u-g\pi_1-h\pi_2),$$
worin das System der Indices h, g die **Charakteristik** der Thetafunction heisst, so ziehen wir aus der oben gefundenen Periodicität von $\vartheta(z)$ die Functionalgleichungen
$$\text{I)}\begin{cases}\vartheta_{hg}(z+\nu i\pi) = (-1)^{h\nu}\vartheta_{hg}(z), & \vartheta_{hg}(z+\mu\tau) = (-1)^{g\mu}e^{-2\mu z-\mu\mu\tau}\vartheta_{hg}(z),\\ \Theta_{hg}(u+2\nu\pi_1) = (-1)^{h\nu}\Theta_{hg}(u), & \Theta_{hg}(u+2\mu\pi_2) = (-1)^{g\mu}e^{\frac{-\mu ui\pi}{\pi_1}-\frac{i\mu^2\pi\pi_2}{\pi_1}}\Theta_{hg}(u).\end{cases}$$
Die Darstellung durch unendliche Producte lehrt auch, dass die Thetafunctionen in Bezug auf $e^z = t$ mit Ausnahme der Stellen $t=0$ und $t=\infty$ überall reguläre Functionen von t sind und sich deshalb nach dem Laurent'schen Satze (§ 22) in eine nach auf- und absteigenden Potenzen von t geordnete Reihe entwickeln lassen. Die Functionalgleichungen I) dienen dazu, die Coefficienten bis auf einen allen gemeinsamen Factor vollständig zu bestimmen. Zu dem Ende setzen wir
$$\vartheta_{hg}(z) = \overline{\mathfrak{S}}A_m t^m = \overline{\mathfrak{S}}A_m e^{mz} = \overline{\mathfrak{S}}C_m,$$
so folgt aus der ersten der Functionalgleichungen I)
$$\vartheta_{hg}(z+i\pi) = \overline{\mathfrak{S}}A_m e^{zm}.(-1)^m = (-1)^h\vartheta_{hg}(z) = (-1)^h\overline{\mathfrak{S}}A_m e^{zm},$$
und hieraus nach § 22 $A_m(-1)^{h+m} = A_m$, oder wenn man $2m'+h$ und $2m'+h+1$ für m setzt,
$$A_{2m'+h} = A_{2m'+h},\quad A_{2m'+h+1} = -A_{2m'+h+1} = 0.$$
Also bleibt $A_{2m'+h}$ unbestimmt, und es ist
$$\vartheta_{hg}(z) = e^{hz}.\overline{\mathfrak{S}}B_m e^{2mz},$$
wenn B_m für A_{2m+h} gesetzt wird.

Nun wenden wir auf diese Reihe weiter die zweite Functionalgleichung unter I) an, so ist, wenn $\varkappa$ eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet,
$$\vartheta_{hg}(z+\tau\varkappa) = \overline{\mathfrak{S}}B_m e^{2mz+hz+2m\tau\varkappa+h\tau\varkappa} = \vartheta_{hg}(z).e^{-\tau\varkappa^2-2\varkappa z-g\varkappa i\pi}$$
$$= \overline{\mathfrak{S}}B_m e^{-\tau\varkappa^2+2(m-\varkappa)z+hz-g\varkappa i\pi}.$$
Setzen wir in dem letzten Ausdrucke m für $m-\varkappa$, so führen wir dadurch nur eine veränderte Zählung der Glieder ein und erhalten
$$\overline{\mathfrak{S}}e^{-\tau\varkappa^2+(2m+h)z-g\varkappa i\pi}B_{m+\varkappa} = \overline{\mathfrak{S}}e^{(2m+h)z+2m\tau\varkappa+h\tau\varkappa}B_m,$$
woraus wiederum nach § 22 folgt
$$B_{m+\varkappa}.e^{-\tau\varkappa^2-g\varkappa i\pi} = B_m e^{2m\tau\varkappa+h\tau\varkappa}.$$
Hierdurch wird jeder Coefficient mit jedem andern, B_m mit $B_{m'}$ in Verbindung gesetzt, weil $\varkappa$ eine willkürliche ganze positive oder negative Zahl ist. Man sieht a posteriori leicht ein, dass diese unendlich vielen Gleichungen nicht im Widerspruche mit einander stehen. Es ist aber für $m=0$
$$B_\varkappa = B_0.e^{h\tau\varkappa+\tau\varkappa^2+g\varkappa i\pi},$$

worin $\varkappa$ beliebig ist, also durch m ersetzt werden kann. So haben wir denn, B statt B_0 gesetzt,

$$\vartheta_{hg}(z) = B\,.\,e^{hz}\,\overline{\mathfrak{S}}\,e^{2m(z+\frac{1}{2}\tau h+\frac{1}{2}gi\pi)+\tau m^2}$$

und
$$C_{m+1}:C_m = e^{2\tau m+(h+1)\tau+2z+gi\pi},\quad C_{-m-1}:C_{-m} = e^{2m\tau-(h-1)\tau-2z-gi\pi}.$$

Beide Quotienten nähern sich mit wachsendem m der Null dann und nur dann, wenn τ einen negativen reellen Theil besitzt, und die Reihe convergirt unter dieser Voraussetzung für beliebige endliche Werthe von z, was übrigens a priori geschlossen werden konnte.

Die Constante B beschränken wir durch die partielle Differentialgleichung

$$\text{II)}\quad \frac{4\,\partial\,\vartheta_{hg}(z)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\vartheta_{hg}(z)}{\partial z^2}.$$

Sie wird erfüllt, wenn $4\partial B:\partial\tau = h^2B$, also $B = e^{\frac{1}{4}h^2\tau}\,.\,C$, und C von τ unabhängig genommen wird. Es soll aber $C = e^{\frac{1}{2}hgi\pi}$ gesetzt werden. Dann gewinnt man die Reihendarstellungen

$$\text{III)}\quad \begin{cases} \vartheta(z) = \vartheta_{00}(z) = \overline{\mathfrak{S}}\,e^{\tau mm+2mz} = \Theta(u) = 1+2\mathfrak{S}\,q^{mm}\cos(m\pi u:\pi_1), \\ \vartheta_{01}(z) = \overline{\mathfrak{S}}(-1)^m e^{\tau mm+2mz} = \Theta_{01}(u) = 1+2\mathfrak{S}(-1)^m q^{mm}\cos(m\pi u:\pi_1), \\ \vartheta_{10}(z) = \overline{\mathfrak{S}}\,e^{\tau\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2+(2m+1)z} = \Theta_{10}(u) = 2q^{\frac{1}{4}}\mathfrak{S}\,q^{m(m-1)}\cos[(2m-1)\pi u:2\pi_1], \\ \vartheta_{11}(z) = \overline{\mathfrak{S}}\,e^{\tau\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2+\frac{2m+1}{2}(2z+i\pi)} = \Theta_{11}(u) = 2q^{\frac{1}{4}}\mathfrak{S}\,q^{m(m-1)}(-1)^{m-1}\sin[(2m-1)\pi u:2\pi_1]. \\ \vartheta_{hg}(z) = \overline{\mathfrak{S}}\,e^{\left(\frac{2m+h}{2}\right)^2\tau+\frac{2m+h}{2}(2z+gi\pi)}. \end{cases}$$

Die Reihendarstellung lehrt sofort, dass man nur Thetafunctionen mit vier verschiedenen Charakteristiken zu betrachten braucht, denn es ergeben sich aus ihr leicht die Gleichungen

$$\text{IV)}\quad \vartheta_{h+2\nu,\,g+2\mu}(z) = (-1)^{\mu h}\vartheta_{h,\,g}(z),\quad \Theta_{h+2\nu,\,g+2\mu}(u) = (-1)^{\mu h}\Theta_{h,\,g}(u).$$

Die Charakteristik heisst gerade, wenn $h\,.\,g$ gerade ist, ungerade, wenn $h\,.\,g$ ungerade ist. Von den vier Charakteristiken 0,0; 0,1; 1,0; 1,1 sind die drei ersten gerade, die letzte ist ungerade. Aus den Gleichungen

$$\vartheta_{hg}(z) = e^{\frac{1}{4}h^2\tau+hz+\frac{1}{2}hgi\pi}\,.\,\vartheta(z+\tfrac{1}{2}h\tau+\tfrac{1}{2}gi\pi) = e^{\frac{1}{4}h^2\tau+hz+\frac{1}{2}hgi\pi}\,\vartheta(-z-\tfrac{1}{2}h\tau-\tfrac{1}{2}gi\pi)$$
$$= e^{\frac{1}{4}h^2\tau+hz+\frac{1}{2}hgi\pi}\,.\,\vartheta(-z+\tfrac{1}{2}h\tau+\tfrac{1}{2}gi\pi)\,e^{-h^2\tau+2h(\frac{1}{2}h\tau+\frac{1}{2}gi\pi)-2hz} = e^{hgi\pi}\,.\,\vartheta_{hg}(-z)$$

folgt, dass die Thetafunctionen mit gerader Charakteristik gerade, mit ungerader Charakteristik ungerade Functionen ihres Arguments sind, was aus der Product- oder Reihendarstellung schon für die vier einfachsten Charakteristiken bekannt ist. Durch Darstellung aller vorkommenden Thetafunctionen durch die mit der Charakteristik 0,0 erweist man unschwer die Richtigkeit der Beziehungen

$$\text{V)}\quad \begin{cases} \vartheta_{hg}(z+\tfrac{1}{2}h'\tau+\tfrac{1}{2}g'i\pi) = \vartheta_{h+h',\,g+g'}(z)\,e^{-h'z-\frac{1}{4}h'h'\tau-\frac{1}{2}(g+g')h'i\pi}, \\ \Theta_{hg}(u+h'\pi_2+g'\pi_1) = \Theta_{h-h',\,g-g'}(u)\,e^{-\frac{h'u\pi i}{\pi_1}-\frac{1}{4}\frac{h'h'i\pi\pi_2}{\pi_1}+\frac{i\pi}{2}h'(g-g')}, \\ \Theta_{hg}(u+h'\pi_2+g'\pi_1):\Theta_{h_1,\,g_1}(u+h'\pi_2+g'\pi_1) = e^{\frac{1}{2}h'(g-g_1)i\pi}\,\Theta_{h-h',\,g-g'}(u):\Theta_{h_1-h',\,g_1-g'}(u). \end{cases}$$

§ 48. **Die Grösse $\mathfrak{D}$ und die Constanten ϑ, ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ'_{11}.** Die von z oder u unabhängige Constante $\mathfrak{D}$ des vorigen Paragraphen bestimmen wir nach der Methode Jacobi's (Fundamenta nova, pag. 178, oder Gesammelte Werke Bd. I S. 230), für den Augenblick $\varphi(q)$ für $1:\mathfrak{D}$ setzend. Jacobi geht von den beiden Gleichungen aus*)

$$\mathfrak{P}(1+2q^{2n+1}\cos 2iz+q^{2(2n+1)}) = \varphi(q)\,\overline{\mathfrak{S}}\,q^{mm}e^{2mz},$$
$$2\cos iz\,\mathfrak{P}(1+2q^{2(n+1)}\cos 2iz+q^{4(n+1)}) = \varphi(q)\,\overline{\mathfrak{S}}\,q^{m(m+1)}e^{(2m+1)z},$$

welche aus Vergleichung der Darstellung der Functionen $\vartheta(z)$, $\vartheta_{10}(z)$ durch Reihen und Producte ent-

*) Die Verwendung des Buchstaben q in den Thetafunctionen ist auf die Schöpfer der neuern Theorie der elliptischen Functionen, Jacobi und Abel, zurückzuführen. Auch in dem Epoche machenden Werke von Briot und Bouquet ist er beibehalten. Dann haben sich lange Zeit die meisten Mathematiker dem angeschlossen, so dass das q historisch geworden schien. Jetzt scheint die Stellung dieses Buchstaben durch den vielleicht noch klassischeren h erschüttert. Der Verfasser ist der Tradition treu geblieben.

springen. Bildet man das Product ihrer linken Seiten, setzt darin qq für q, so ergiebt sich die linke Seite der letzten Gleichung wieder. Das gleiche muss für die rechten Seiten statt haben, d. h. es muss

$$\varphi(q^2)\,\varphi(q^2)\,\overline{\mathfrak{S}}\,q^{2mm}e^{2mz}\,.\,\overline{\mathfrak{S}}\,q^{2m'(m'+1)}e^{(2m'+1)z}=\varphi(q)\,\overline{\mathfrak{S}}\,q^{m(m+1)}e^{(2m+1)z}$$

sein. Beide Seiten lassen sich nach Potenzen von e^z ordnen. Vergleicht man, was beiderseits mit der ersten Potenz von e^z multiplicirt ist, so erhält man

$$\varphi(q)=\varphi(q^2)\,\varphi(q^2)\,\overline{\mathfrak{S}}\,q^{4mm+2m}=\varphi(q^2)\,\varphi(q^2)\,(1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\ldots)=\tfrac{1}{2}\,\varphi(q^2)\,\varphi(q^2)\,\overline{\mathfrak{S}}\,q^{m(m+1)}.$$

Da nun $\varphi(q)\,\overline{\mathfrak{S}}\,q^{m(m+1)}=2\mathfrak{P}(1+2q^{2(n+1)}+q^{4(n+1)})=2\mathfrak{P}(1+q^{2(n+1)})^2$ ist, so folgt hieraus

$$\left(\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^2)}\right)^2=\mathfrak{P}(1+q^{2(n+1)})^2,\quad \frac{\varphi(q)}{\varphi(q^2)}=\mathfrak{P}(1+q^{2(n+1)})=\mathfrak{P}\frac{1-q^{4(n+1)}}{1-q^{2(n+1)}},\quad \frac{\varphi(q^2)}{\varphi(q^4)}=\mathfrak{P}\frac{1-q^{8(n+1)}}{1-q^{4(n+1)}},$$

$$\frac{\varphi(q^4)}{\varphi(q^8)}=\mathfrak{P}\frac{1-q^{16(n+1)}}{1-q^{8(n+1)}},\quad\ldots,\quad\frac{\varphi(q^{2^{\nu-1}})}{\varphi(q^{2^\nu})}=\mathfrak{P}\frac{1-q^{(n+1)2^{\nu+1}}}{1-q^{(n+1)2^\nu}}.$$

Beachtet man, dass $\varphi(q^{+\infty})=1$ ist, so erhält man durch den Grenzübergang $\nu=\infty$ aus dem Producte

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^2)}\cdot\frac{\varphi(q^2)}{\varphi(q^4)}\cdot\frac{\varphi(q^4)}{\varphi(q^8)}\cdots\frac{\varphi(q^{2^{\nu-1}})}{\varphi(q^{2^\nu})}=\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^{2^\nu})}=\mathfrak{P}\frac{1-q^{(n+1)2^{\nu+1}}}{1-q^{2(n+1)}}$$

das Resultat

$$\text{I)}\quad \mathfrak{D}=1:\varphi(q)=\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)}).$$

Setzt man dies in die Darstellungen der Thetafunctionen durch Producte ein, und giebt z den Werth Null, so folgt

$$\text{II)}\quad \vartheta=\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})(1+q^{2n+1})^2,\quad \vartheta_{01}=\mathfrak{P}(1-q^{n+1}):(1+q^{n+1})=\mathfrak{P}(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+1})^2,$$

$$\vartheta_{10}=2\sqrt[4]{q}\,\mathfrak{P}(1-q^{4n+4}):(1-q^{4n+2}).$$

Das Product dieser drei Grössen ist

$$\vartheta\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{10}=2q^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})^2(1+q^{2n+1})^2(1-q^{2n+1})^2(1-q^{4n+4}):(1-q^{4n+2})$$
$$=2q^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})^2(1-q^{2(2n+1)})(1-q^{4n+4})=2q^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})^3.$$

Dividirt man die Productdarstellung von $\vartheta_{11}(z)$ durch z, geht mit z zur Grenze Null über und berücksichtigt die Identität

$$\mathfrak{P}(1-q^{2n+1})(1+q^{2n+1})(1+q^{2(n+1)})=\mathfrak{P}(1-q^{2(2n+1)})(1-q^{4(n+1)}):(1-q^{2(n+1)})=1,$$

so erhält man $\qquad$ III) $\vartheta'_{11}=i\,\vartheta\,q^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})^2=2\,i\,q^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})^3,$

und durch Vergleich mit dem obigen Product die sehr wichtige Beziehung

$$\text{IV)}\quad \vartheta'_{11}=i\,\vartheta\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{10},\quad \Theta'_{11}=\pi\,\Theta\,\Theta_{01}\,\Theta_{10}:2\pi_1.$$

Jacobi hat die Grösse $\mathfrak{D}$ nicht blos durch ein unendliches Product, sondern auch noch durch eine unendliche Reihe dargestellt, indem er wie folgt schloss. Durch Vergleichung der Product- und Reihendarstellung der Function $\vartheta_{11}(z)$ findet man

$$2\sin iz\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})(1-2q^{2n+2}\cos 2iz+q^{4n+4})=i\,\mathfrak{S}\,q^{mm+m}e^{(2m+1)z}(-1)^m.$$

Wird $-\frac{1}{3}i\pi$ für z gesetzt, so ist $\sin\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$ und

$$\sqrt{3}\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})(1+q^{2n+2}+q^{4n+4})=\sqrt{3}\,\mathfrak{P}(1-q^{6(n+1)})$$
$$=i\,\mathfrak{S}\,q^{mm+m}(-1)^m\left(\cos\frac{2m+1}{3}\pi-i\sin\frac{2m+1}{3}\pi\right).$$

Combinirt man den m entsprechenden Summanden mit dem $-m-1$ entsprechenden, so findet man, dass der mit $\cos((2m+1):3\pi)$ multiplicirte Theil der letzten Reihe verschwindet. Die $\sin(2(m+1):3\pi)$ enthaltenden Glieder ordnen wir in drei Klassen, indem wir für m der Reihe nach $3m$, $3m-1$ und $3m+1$ setzen, wodurch wir die Gleichung gewinnen

$$\sqrt{3}\,\mathfrak{P}(1-q^{6(n+1)})$$
$$=\overline{\mathfrak{S}}\,q^{9mm+3m}(-1)^m\sin\tfrac{1}{3}\pi+\mathfrak{S}\,q^{9mm-3m}(-1)^m\sin\tfrac{1}{3}\pi-\overline{\mathfrak{S}}\,q^{9mm+9m+2}(-1)^m\sin\tfrac{2}{3}\pi.$$

Combinirt man in der letzten Summe wieder jeden der Zahl m entsprechenden Summanden mit dem zur Zahl $-m-1$ gehörigen, so ergiebt sich, dass sie verschwindet. Die zweite Summe geht in die erste über, wenn man $-m$ für m setzt. Wenn man noch den Factor $\sqrt{3}$ forthebt und q^3 durch q ersetzt, so findet man endlich die Gleichung

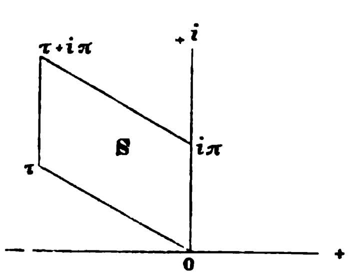
$$\text{V)}\quad \mathfrak{D}=\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})=\overline{\mathfrak{S}}(-1)^m q^{3mm+m}=1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\ldots.$$

Für die Formel $\vartheta'_{11} = i\vartheta\vartheta_{01}\vartheta_{10}$ habe ich einen anderen, ebenfalls auf der Productdarstellung beruhenden Beweis in Schlömilch's Zeitschrift (Jahrg. 11 [1866], S. 247) gegeben. Diese Beweise lassen sich, weil für die Thetafunctionen mehrerer Veränderlichen keine Productdarstellungen existiren, nicht verallgemeinern. Man hat deshalb noch andere Beweise dieses wichtigen Satzes gesucht und gefunden, deren einige wir später besprechen werden.*)

§ 49. **Das Verschwinden der Thetafunctionen.** Aus der Darstellung der Thetafunctionen durch unendliche Producte erkennt man sofort, dass die Thetafunctionen $\vartheta(z)$, $\Theta(u)$ bez. in den Punkten

$$\tfrac{1}{2}(2\mu+1)\tau + \tfrac{1}{2}(2\nu+1)i\pi, \quad (2\nu+1)\pi_1 + (2\mu+1)\pi_2$$

und nur in diesen Punkten verschwinden, und dass also ϑ, ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ'_{11} nicht verschwinden, weil ein convergentes unendliches Product nur dann verschwindet, wenn ein Factor verschwindet. Wir wollen aber für diesen Satz noch einen directen, auf § 20 beruhenden Beweis beibringen.



Wir suchen die Anzahl der Punkte, für welche $\vartheta(z)$ verschwindet, innerhalb eines Parallelogrammes, dessen Ecken o, $i\pi$, $\tau + i\pi$, τ sind. Da $\vartheta(z)$ in diesem Parallelogramm nicht Unendlich wird, so wächst nach § 20 $lg\,\vartheta(z)$ um so viele ganze Multipla von $2i\pi$, wenn z in positiver Richtung um die Begrenzung s des Parallelogrammes herumgeführt wird**), als Punkte im Innern desselben vorhanden sind, für welche $\vartheta(z)$ verschwindet. Dieser Zuwachs ist aber

$$\int_{(s)} d\,lg\,\vartheta(z) = \int_0^{i\pi} d\,lg\,\vartheta(z) + \int_{i\pi}^{\tau+i\pi} d\,lg\,\vartheta(z) + \int_{\tau+i\pi}^{\tau} d\,lg\,\vartheta(z) + \int_{\tau}^{0} d\,lg\,\vartheta(z)$$

$$= \int_0^{i\pi} d\,lg\,\vartheta(z) + \int_0^{\tau} d\,lg\,\vartheta(z+i\pi) + \int_{i\pi}^{0} d\,lg\,\vartheta(z+\tau) + \int_{\tau}^{0} d\,lg\,\vartheta(z)$$

$$= \int_0^{i\pi} d\,lg\left(\frac{\vartheta(z)}{\vartheta(z+\tau)}\right) + \int_0^{\tau} d\,lg\left(\frac{\vartheta(z+i\pi)}{\vartheta(z)}\right) = 2\int_0^{i\pi} dz = 2\pi i,$$

worin die Integrale geradlinig zu nehmen sind. Es wird demnach $\vartheta(z)$ in jenem Parallelogramm **nur an einer einzigen Stelle** Null, und zwar in der ersten Ordnung.

Eine analoge Behandlung des Integrales $\int lg\,\vartheta(z)dz$ liefert den Werth von z, für welchen $\vartheta(z)$ verschwindet; da aber $\vartheta_{11}(z)$ ungerade ist, für $z=0$ verschwindet, so folgt aus der Gleichung

$$\vartheta_{11}(z) = i e^{z + \frac{1}{4}\tau}\,\vartheta(z + \tfrac{1}{2}\tau + \tfrac{1}{2}i\pi),$$

dass $z = \frac{1}{2}i\pi + \frac{1}{2}\tau$ jener Punkt ist, weshalb wir diese Beweisführung unterdrücken.

*) Die Beziehungen zwischen den Sigma- und Theta-Functionen sind nach der Sammlung des Herrn Schwarz in folgenden Formeln enthalten. Es sei $\pi_{m_1,m_2} = m_1\pi_1 + m_2\pi_2$, und es bilden Σ' eine Summe, Π' ein Product, in dem die Posten bez. Factoren für alle Combinationen ganzer positiver und negativer Zahlen gebildet werden, mit Ausschluss der Combination $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, so ist

$$g_2 = \frac{15}{4}\Sigma'\frac{1}{\pi^4_{m_1,m_2}}, \quad g_3 = \frac{35}{16}\Sigma'\frac{1}{\pi^6_{m_1,m_2}}, \quad \sigma(u) = u\,\Pi'\left(1 - \frac{u}{2\pi_{m_1,m_2}}\right)e^{\frac{u}{2\pi_{m_1,m_2}} + \frac{u^2}{8\pi^2_{m_1,m_2}}},$$

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\pi_1}}\frac{2\pi_1}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\pi_1}\,\mathfrak{P}\left\{1 - \frac{\sin^2\frac{u\pi}{2\pi_1}}{\sin^2\frac{n\pi\pi_2}{\pi_1}}\right\} = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\pi_1}}\frac{2\pi_1}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\pi_1}\,\mathfrak{P}\frac{1 - 2q^{2n+2}\cos\frac{u\pi}{\pi_1} + q^{4n+4}}{(1-q^{2n+2})^2},$$

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{2\pi_1}\left\{\frac{1}{6} + \mathfrak{S}\frac{1}{\sin^2\frac{m\pi\pi_2}{\pi_1}}\right\} = \frac{\pi^2}{2\pi_1}\left(\frac{1}{6} - \mathfrak{S}\frac{4q^{2m}}{(1-q^{2m})^2}\right).$$

$$\sigma_1(u) = e^{-\eta_1 u}\sigma(u+\pi_1):\sigma(\pi_1) = e^{\eta_1 u}\sigma(\pi_1 - u):\sigma(\pi_1), \quad \sigma_2(u) = e^{-\eta_3 u}\sigma(\pi_3+u):\sigma(\pi_3) = e^{\eta_3 u}\sigma(\pi_3 - u):\sigma(\pi_3),$$

$$\sigma_3(u) = e^{-\eta_2 u}\sigma(\pi_2+u):\sigma(\pi_2) = e^{\eta_2 u}\sigma(\pi_2 - u):\sigma(\pi_2).$$

$$\pi_3 = \pi_1 + \pi_2, \quad \eta_3 = \eta_1 + \eta_2 = \sigma'(\pi_3):\sigma(\pi_3), \quad \eta_1 = \sigma'(\pi_1):\sigma(\pi_1), \quad \eta_2 = \sigma'(\pi_2):\sigma(\pi_2).$$

**) Sollte ein Punkt auf die Begrenzung des Parallelogrammes fallen, so muss dieselbe durch parallele Ausbiegungen abgeändert, oder das Parallelogramm verschoben werden, vgl. § 36.

§ 50. Thetafunctionen höherer Ordnung. Ist $\varphi(z)$ eine ganze transcendente Function, welche die Gleichungen befriedigt

$$\text{I)}\quad \varphi(z+\lambda i\pi)=(-1)^{h\lambda}\varphi(z),\quad \varphi(z+\mu\tau)=(-1)^{\mu g}\varphi(z)e^{-2\mu zp-2\mu\mu\tau p},$$

so heisst φ eine Thetafunction p^{ter} Ordnung mit der Charakteristik h, g und ist in der Form darstellbar

$$\text{II)}\quad \varphi(z)=\Sigma B_r\bar{\vartheta}(pz+\tfrac{1}{2}(2r+h)\tau+\tfrac{1}{2}gi\pi)e^{(2r+h)z},$$

worin die Summe über die Zahlen $r=0,1,2\ldots,p-1$ zu erstrecken ist, und $\bar{\vartheta}$ eine Thetafunction mit dem Modul $p\tau$ bedeutet. Die Function $\varphi(z)=\vartheta(z)^{\alpha}\vartheta_{01}(z)^{\beta}\vartheta_{10}(z)^{\gamma}\vartheta_{11}(z)^{\delta}$ ist eine Thetafunction $\alpha+\beta+\gamma+\delta^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Charakteristik $\gamma+\delta,\ \beta+\delta$.

Die Function $\varphi(z)e^{-hz}$ hat die Periode $i\pi$ und ist deshalb eine reguläre Function von $t=e^{2z}$, wovon nur die Punkte $t=0$ und $t=\infty$ eine Ausnahme machen. Nach dem Laurent'schen Satze ist daher

$$\varphi(z)=e^{hz}\mathfrak{S}B_m e^{2mz}$$

und genügt in dieser Form der ersten der unter I) aufgestellten Functionalgleichungen. Wendet man die zweite auf sie an, so ergiebt sich

$$e^{hz+h\mu\tau}\,.\,\mathfrak{S}B_m e^{2mz+2m\mu\tau}=e^{-\tau p\mu^2-2p\mu z}\,.\,\mathfrak{S}B_m e^{2mz+hz+g\mu i\pi}=e^{-\tau p\mu^2+hz+g\mu i\pi}\,.\,\mathfrak{S}B_{m+\mu p}\,.\,e^{2mz},$$

in welcher letzten Gleichung die Zählung der Glieder um $p\mu$ verschoben ist. Hieraus folgt:

$$B_m e^{2m\mu\tau+h\mu\tau}=e^{-\tau p\mu^2+g\mu i\pi}\,.\,B_{m+\mu p},\quad B_{m+\mu p}=B_m\,.\,e^{\tau p\mu^2+2m\mu\tau+h\mu\tau+g\mu i\pi}.$$

Somit werden alle Coefficienten, die um p Glieder von einander entfernt stehen, mit einander verknüpft. Ist r eine der Zahlen $0,1,2,\ldots,p-1$, und setzt man $m=xp+r$, so erhält man

$$\varphi(z)=\sum_{(r)\,0}^{p-1}\Big(B_r e^{hz}\sum_{(x)\,-\infty}^{\infty}e^{\tau px^2+2rx\tau+2pxz+2rz+hx\tau+gxi\pi}\Big)=\sum_{(r)\,0}^{p-1}B_r e^{(2r+h)z}\,.\,\bar{\vartheta}\Big(pz+\frac{2r+h}{2}\tau+g\frac{i\pi}{2}\Big).$$

Die hierin vorkommenden Thetafunctionen sind Potenzreihen, die alle verschiedene Potenzen von e^z enthalten, so dass keine lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen ihnen Statt hat. Demnach lässt sich jede Function $\varphi(z)$, welche den Gleichungen I) Genüge leistet, durch p von einander unabhängige Thetafunctionen p^{ter} Ordnung linear und homogen ausdrücken. Hieraus fliesst der Satz:

Zwischen $p+1$, für endliche Werthe des Argumentes eindeutigen und stetigen, also auch endlichen Functionen einer complexen Veränderlichen z, welche die Gleichungen

$$\text{III)}\quad \varphi(z+\lambda i\pi)=(-1)^{h\lambda}\,.\,\varphi(z),\quad \varphi(z+\mu\tau)=(-1)^{g\mu}\,.\,e^{-\tau\mu^2p-2\mu\tau p}\,.\,\varphi(z)$$

befriedigen, also zwischen $p+1$ Thetafunctionen μ^{ter} Ordnung gleicher Charakteristik, besteht stets eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten, von denen einige auch Null sein können.

§ 51. Beziehungen zwischen den Quadraten der Thetafunctionen. Die Quadrate der Thetafunctionen sind Thetafunctionen zweiter Ordnung, und es besteht daher zwischen je dreien unter ihnen eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten. Wir setzen die beiden Gleichungen an:

$$\vartheta_{01}^2(z)=\alpha'\vartheta_{11}^2(z)+\beta'\vartheta_{10}^2(z),\quad \vartheta_{01}^2(z)=\alpha''\vartheta_{11}^2(z)+\beta''\vartheta^2(z).$$

Für $z=0$ haben wir $\qquad \beta'=\vartheta_{01}^2:\vartheta_{10}^2,\quad \beta''=\vartheta_{01}^2:\vartheta^2.$

Für $z=\frac{i\pi}{2}$, $\qquad \alpha'=\vartheta_{01}^2\Big(\frac{i\pi}{2}\Big):\vartheta_{11}^2\Big(\frac{i\pi}{2}\Big)=\vartheta^2:\vartheta_{10}^2.$

Für $z=\frac{\tau+i\pi}{2}$, $\qquad \alpha''=\vartheta_{01}^2\Big(\frac{\tau+i\pi}{2}\Big):\vartheta_{11}^2\Big(\frac{\tau+i\pi}{2}\Big)=\vartheta_{10}^2:\vartheta^2.$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\text{I)}\quad \vartheta_{10}^2:\vartheta^2=\Theta_{10}^2:\Theta^2=k,\quad \vartheta_{01}^2:\vartheta^2=\Theta_{01}^2:\Theta^2=k',$$

so haben wir hieraus

$$\text{II)}\quad \begin{aligned} k\vartheta_{01}^2(z)&=\vartheta_{11}^2(z)+k'\vartheta_{10}^2(z), & k\Theta_{01}^2(u)&=\Theta_{11}^2(u)+k'\Theta_{11}^2(u),\\ \vartheta_{01}^2(z)&=k\vartheta_{11}^2(z)+k'\vartheta^2(z), & \Theta_{01}^2(u)&=k\Theta_{11}^2(u)+k'\Theta^2(u), \end{aligned}$$

und setzen wir in der letzten Gleichung $z=\frac{1}{2}i\pi$, so liefert sie die wichtigen Relationen:

$$\text{III)}\quad 1=k\frac{\vartheta_{10}^2}{\vartheta^2}+k'\frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta^2}=k^2+k'^2,\quad \vartheta^4=\vartheta_{10}^4+\vartheta_{01}^4.$$

§ 52. **Die sogenannten Additionstheoreme der Thetafunctionen.** Lässt sich $w(u+v)$ durch $w(u)$ und $w(v)$ ausdrücken, so nennt man die Gleichung, welche den Ausdruck liefert, das Additionstheorem der Function w. Ein solches Theorem ist für die Thetafunctionen nicht bekannt, wohl aber für die Quotienten zweier Thetafunctionen. Gleichwohl hat sich die Gewohnheit eingeschlichen, Gleichungen, welche zu den Additionstheoremen der Thetaquotienten führen, die Additionstheoreme der Thetafunctionen zu nennen.

Die Function $\vartheta_{hg}(z+t)\vartheta_{h'g'}(z-t)$ ist, in Bezug auf z sowohl als auch auf t, eine Thetafunction zweiter Ordnung mit der Charakteristik $h+h'$, $g+g'$. Hieraus lassen sich die Gleichungen schliessen:

$$\text{I)}\quad \vartheta\vartheta_{10}\vartheta_{11}(z+t)\vartheta_{01}(z-t)=\vartheta_{10}(t)\vartheta(t)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}(z)+\vartheta_{10}(z)\vartheta(z)\vartheta_{11}(t)\vartheta_{01}(t).$$
$$\text{II)}\quad \vartheta\vartheta_{10}\vartheta_{11}(z-t)\vartheta_{01}(z+t)=\vartheta_{10}(t)\vartheta(t)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}(z)-\vartheta_{10}(z)\vartheta(z)\vartheta_{11}(t)\vartheta_{01}(t).$$
$$\text{III)}\quad \vartheta^2_{01}\vartheta_{01}(z+t)\vartheta_{01}(z-t)=\vartheta^2_{01}(t)\vartheta^2_{01}(z)-\vartheta^2_{11}(z)\vartheta^2_{11}(t).$$
$$\text{IV)}\quad \vartheta^2_{01}\vartheta(z+t)\vartheta(z-t)=\vartheta^2(z)\vartheta^2_{01}(t)-\vartheta^2_{10}(z)\vartheta^2_{11}(t)=\vartheta^2(t)\vartheta^2_{01}(z)-\vartheta^2_{10}(t)\vartheta^2_{11}(z).$$
$$\text{V)}\quad \vartheta_{10}\vartheta_{01}\vartheta_{10}(z+t)\vartheta_{01}(z-t)=\vartheta_{10}(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{01}(t)-\vartheta(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta(t)\vartheta_{11}(t).$$
$$\text{VI)}\quad \vartheta_{10}\vartheta_{01}\vartheta_{10}(z-t)\vartheta_{01}(z+t)=\vartheta_{10}(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{01}(t)+\vartheta(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta(t)\vartheta_{11}(t).$$
$$\text{VII)}\quad \vartheta\vartheta_{01}\vartheta(z+t)\vartheta_{01}(z-t)=\vartheta(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta(t)\vartheta_{01}(t)-\vartheta_{10}(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{11}(t).$$
$$\text{VIII)}\quad \vartheta\vartheta_{01}\vartheta(z-t)\vartheta_{01}(z+t)=\vartheta(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta(t)\vartheta_{01}(t)+\vartheta_{10}(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{11}(t).$$
$$\text{IX)}\quad \vartheta^3_{01}\vartheta_{01}(2z)=\vartheta^4_{01}(z)-\vartheta^4_{11}(z).$$
$$\text{X)}\quad \vartheta\vartheta^2_{01}\vartheta(2z)=\vartheta^2(z)\vartheta^2_{01}(z)-\vartheta^2_{10}(z)\vartheta^2_{11}(z).$$
$$\text{XI)}\quad \vartheta^2_{01}\vartheta_{10}\vartheta_{10}(2z)=\vartheta^2_{10}(z)\vartheta^2_{01}(z)-\vartheta^2(z)\vartheta^2_{11}(z).$$
$$\text{XII)}\quad \vartheta^3_{10}\vartheta_{10}(2z)=\vartheta^4(z)-\vartheta^4_{01}(z).$$

Von diesen Formeln brauchen nur einige erwiesen zu werden, weil die Methode für alle die gleiche ist. Die Thetafunctionen zweiter Ordnung

$$\vartheta_{11}(z+t)\vartheta_{01}(z-t),\quad \vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}(z),\quad \vartheta_{10}(z)\vartheta(z)$$

haben als Functionen von z die gemeinsame Charakteristik 1,0, es findet daher zwischen ihnen eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt. Man kann deshalb die Gleichung ansetzen

$$\vartheta_{11}(z+t)\vartheta_{01}(z-t)=A\vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}(z)+B\vartheta_{10}(z)\vartheta(z).$$

Für $z=0$ ergiebt sich $B=\vartheta_{11}(t)\vartheta_{01}(t):\vartheta\vartheta_{10}$, und entweder aus der Symmetrie der linken Seite in Bezug auf z und t, oder dadurch dass man $z=\frac{1}{2}i\pi$ setzt, ergiebt sich $\vartheta_{10}(t)\vartheta(t):\vartheta\vartheta_{10}=A$, und damit ist die Gleichung I) erwiesen. Verwandelt man t in $-t$, so erhält man II) u. s. w. Für $t=z$ ergiebt sich IX) aus III), X) aus IV). XII) ergiebt sich, wenn man aus XI) $\vartheta_{10}(z)$ und $\vartheta_{11}(z)$ mittels der Gleichungen II) des vorigen Paragraphen eliminirt.

§ 53. **Jacobi's zweiter Beweis der Formel $\vartheta'_{11}=i\vartheta\vartheta_{01}\vartheta_{10}$.** Ordnet man die die Thetafunctionen darstellenden Reihen dadurch in zwei andere um, dass man die Glieder mit geradem Index und die Glieder mit ungeradem Index zusammen nimmt, und deutet den Modul der Thetafunctionen durch die Bezeichnung $\vartheta_{hg}(z,\tau)$ an, so erhält man die Gleichungen

$$\text{I)}\quad \vartheta(z,\tau)=\vartheta(2z,4\tau)+\vartheta_{10}(2z,4\tau),\qquad \text{II)}\quad \vartheta_{01}(z,\tau)=\vartheta(2z,4\tau)-\vartheta_{10}(2z,4\tau).$$

Setzt man diese Werthe von $\vartheta(z)$, $\vartheta_{01}(z)$ in die Gleichung XII) des vorigen Paragraphen ein, und ersetzt dann $2z$ durch z, so findet man

$$\text{III)}\quad \vartheta^3_{10}(0,\tau)\vartheta_{10}(z,\tau)=8\vartheta(z,4\tau)\vartheta_{10}(z,4\tau)(\vartheta^2(z,4\tau)+\vartheta^2_{10}(z,4\tau)),$$

woraus eine ähnliche Gleichung für $\vartheta_{11}(z)$ folgt, wenn man z um $\frac{1}{2}i\pi$ vermehrt, nämlich

$$\text{IV)}\quad \vartheta^3_{10}(0,\tau)\vartheta_{11}(z,\tau)=8\vartheta_{01}(z,4\tau)\vartheta_{11}(z,4\tau)(\vartheta^2_{01}(z,4\tau)+\vartheta^2_{11}(z,4\tau)).$$

Differenzirt man diese Gleichung nach z und setzt $z=0$, so ergiebt sich

$$\text{V)}\quad \vartheta^3_{10}(0,\tau)\vartheta'_{11}(0,\tau)=8\vartheta'_{11}(0,4\tau)\vartheta^3_{01}(0,4\tau).$$

Bildet man das Product der drei aus I), II), III) für $z=0$ fliessenden Gleichungen, so folgt daraus (mit III) § 51):

$$\text{VI)}\quad \vartheta(0,\tau)\vartheta_{01}(0,\tau)\vartheta^4_{10}(0,\tau)=8\vartheta(0,4\tau)\vartheta_{10}(0,4\tau)(\vartheta^4(0,4\tau)-\vartheta^4_{10}(0,4\tau))=8\vartheta(0,4\tau)\vartheta_{10}(0,4\tau)\vartheta^4_{10}(0,4\tau).$$

Dividirt man V) durch VI), so folgt endlich

$$\frac{\vartheta'_{11}(0,\tau)}{\vartheta(0,\tau)\,\vartheta_{01}(0,\tau)\,\vartheta_{10}(0,\tau)} = \frac{\vartheta'_{11}(0,4\tau)}{\vartheta(0,4\tau)\,\vartheta_{01}(0,4\tau)\,\vartheta_{10}(0,4\tau)},$$

d. h. die Function $f(q) = \vartheta'_{11} : \vartheta\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{10}$ hat die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man q^4 für q setzt, also auch wenn man q^{16}, q^{64}, q^{256}, ... für q setzt, und da $q^{+\infty} = 0$ ist, so ist $f(q) = f(0)$. Für $q = 0$ findet man aber leicht $f(0) = i$, und damit die Relation $\vartheta'_{11} = i\vartheta\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{10}$. Man vergleiche noch einen Aufsatz des Herrn Frobenius in Crelle's Journal (Bd. 98 S. 247).

§ 54. **Die Functionen** $S(u)$, $C(u)$, $D(u)$. Die Thetaquadrate haben alle die Charakteristik 0,0, und sind in Bezug auf $i\pi$ bez. $2\pi_1$ periodisch. Vermehrt man aber z um τ oder u um $2\pi_2$, so multipliciren sie sich mit demselben Factor. Der Quotient zweier solcher Quadrate ist demnach eine doppeltperiodische Function mit den Perioden $2\pi_1$, $2\pi_2$.

Als Quotient zweier Thetafunctionen lässt sich eine doppeltperiodische Function mit den Perioden $2\pi_1$, $2\pi_2$ nicht darstellen, gleichwohl sind solche Quotienten doppelt periodische Functionen, aber mit grösseren Perioden, und zwar sind es die Functionen S, C, D, die wir schon früher kennen lernten, welche durch sie, mittels der Gleichungen dargestellt werden:

$$S(u) = \frac{\Theta}{\Theta_{10}}\frac{\Theta_{11}(u)}{\Theta_{01}(u)} = \frac{\Theta_{11}(u)}{\sqrt{k}\,\Theta_{01}(u)},\quad C(u) = \frac{\Theta_{01}}{\Theta_{10}}\frac{\Theta_{10}(u)}{\Theta_{01}(u)} = \frac{\sqrt{k'}\,\Theta_{10}(u)}{\sqrt{k}\,\Theta_{01}(u)},\quad D(u) = \frac{\Theta_{01}}{\Theta}\frac{\Theta(u)}{\Theta_{01}(u)} = \frac{\sqrt{k'}\,\Theta(u)}{\Theta_{01}(u)}.$$

In der That haben die Functionen $\Theta_{11}(u)$ und $\Theta_{01}(u)$ die gemeinsame Periode $4\pi_1$, nach I) § 47, und multipliciren sich mit demselben Factor, wenn u um $2\pi_2$ vermehrt wird. Der Quotient hat also die Perioden $4\pi_1$, $2\pi_2$, die Punkte Null und Punkte Unendlich stimmen genau mit denen von $S(u)$ überein. Endlich ist $S(\pi_1) = \Theta\,\Theta_{11}(\pi_1) : \Theta_{10}\,\Theta_{01}(\pi_1) = 1$ nach IV) § 46. Es stimmt daher die hier definirte Function $S(u)$ mit der des § 42 vollständig überein, und auch die Grösse k ist dieselbe als die dort definirte, denn es ist $S(\pi_1 + \pi_2) = \Theta\,\Theta_{11}(\pi_1+\pi_2) : \Theta_{10}\,\Theta_{01}(\pi_1+\pi_2) = \Theta^2 : \Theta^2_{10} = 1 : k$. Aus der Formel II) des § 51 aber ergiebt sich sofort

$$S^2(u) + C^2(u) = 1,\quad k^2S^2(u) + D^2(u) = 1,\quad D^2(u) - k^2C^2(u) = k'^2,\quad C(u) = \sqrt{1 - S^2(u)},\quad D(u) = \sqrt{1 - k^2S^2(u)}.$$

Dividirt man mit der Gleichung III) des § 52 in die Gleichung I) und ersetzt z durch $-i\pi u : 2\pi_1$, t durch $-i\pi v : 2\pi_1$, so erhält man

$$\frac{\Theta\,\Theta_{01}}{\Theta_{01}\,\Theta_{01}}\,\frac{\Theta_{11}(u+v)}{\Theta_{01}(u+v)} = \frac{\dfrac{\Theta_{11}(u)\,\Theta_{01}(u)\,\Theta_{10}(v)\,\Theta(v) + \Theta_{10}(u)\,\Theta(u)\,\Theta_{11}(v)\,\Theta_{01}(v)}{\Theta^2_{10}(u)\,\Theta^2_{01}(v)}}{\dfrac{\Theta^2_{01}(u)\,\Theta^2_{01}(v) - \Theta^2_{11}(u)\,\Theta^2_{11}(v)}{\Theta^2_{01}(u)\,\Theta^2_{01}(v)}},$$

$$S(u+v) = \frac{S(u)\,C(v)\,D(v) + S(v)\,C(u)\,D(u)}{1 - k^2S^2(u)\,S^2(v)},$$

also das Additionstheorem des § 43. Entwickelt man nach Potenzen von v und vergleicht die mit v multiplicirten Glieder, so erhält man auch wieder $S'(u) = S'(0)\,C(u)\,D(u)$. Dividirt man mit III) in V) im § 52 und mit III) in VII), so erhält man die beiden Gleichungen

$$C(u+v) = \frac{C(u)\,C(v) - D(u)\,D(v)\,S(u)\,S(v)}{1 - k^2S^2(u)\,S^2(v)},\quad D(u+v) = \frac{D(u)\,D(v) - k^2\,C(u)\,C(v)\,S(u)\,S(v)}{1 - k^2S^2(u)\,S^2(v)}.$$

§ 55. **Die Functionen** *sa u*, *ca u*, *da u*. Die Functionen $S(u)$, $C(u)$, $D(u)$ sind Functionen dreier Veränderlichen, u, π_1, π_2; da sie jedoch nur von den Verhältnissen $u:\pi_1$, $\pi_2:\pi_1$ abhängen, so kann man sie durch Functionen von zwei Veränderlichen ausdrücken. Die Analogie von $S(u)$, $C(u)$ mit *sin u*, *cos u* springt schon jetzt in die Augen. Sie wird noch dadurch verstärkt, dass man $\lim S(u) : u$ für $u = 0$ also $S'(0)$ gleich Eins setzt. Ist $\pi_2 : \pi_1$ gegeben, so kann noch über π_1 willkürlich verfügt werden; soll aber $S'(0) = \Theta\,\Theta'_{11} : \Theta_{10}\,\Theta_{01} = 1$ sein, so ist (nach Formel IV) § 48)

$$\pi\,\Theta^2 : 2\pi_1 = 1,\quad 2\pi_1 = \pi\,\Theta\,\Theta,$$

es ist also π_1 durch $\pi_2:\pi_1$ **vollständig bestimmt**. **Für den Fall, dass** π_1 **durch diese Gleichung beschränkt ist, in welchem die Thetafunctionen nur noch Functionen von** u **und** τ (oder q)

sind, ersetzen wir mit Jacobi π_1 durch K, π_2 durch iK', und schreiben sau für $S(u)$, cau für $C(u)$, dau für $D(u)$.

Beim Pendelproblem tritt eine Amplitude auf, deren trigonometrische Functionen die elliptischen Functionen (im engern Sinne) liefern. Aus diesem Grunde hat Jacobi die Bezeichnungen sinus amplitudo, cosinus amplitudo, Δ amplitudo, tg amplitudo und noch einige andere, sich weniger im Gebrauch befindende eingeführt. Für Δ amplitudo ist es practischer differenz amplitudo zu schreiben, sonst aber bleiben wir Jacobi's Terminologie treu, von jedem Wort den Anfangsbuchstaben in der Weise benutzend, dass wir sin am bei Jacobi durch sa, cos am durch ca, Δ a durch da, tg am durch tga ersetzen. Diese Abkürzung scheint mir weniger willkürlich als die Gudermann'sche sn für sa u. s. w. Eine Reihe von Formeln nun, die für diese neuen Functionen gelten, haben auch ohne die über π_1 gemachte Beschränkung statt. Wir begnügen uns jedoch, sie nur in den neuen Formen zu geben; der denkende Leser wird leicht entscheiden, wo die Beschränkung von π_1 überflüssig ist. Verbunden aber sind die beiden Bezeichnungen durch die Beziehung

$$S(u) = sa\,Mu, \quad M = S'(0) = \Theta\,\Theta'_{11} : \Theta_{10}\,\Theta_{01} = \pi\,\Theta^2 : 2\pi_1.$$

Die folgenden Formeln, soweit sie nicht Wiederholung schon gegebener sind, werden aus der Periodicität der Thetafunctionen und aus den Gleichungen V) § 47 ohne Mühe abgeleitet. Auch die Additionstheoreme können dabei verwendet werden.

I) $sau = \Theta_{11}(u) : \sqrt{k}\,\Theta_{01}(u)$, $cau = \sqrt{k'}\,\Theta_{10}(u) : \sqrt{k}\,\Theta_{01}(u)$, $dau = \sqrt{k'}\,\Theta(u) : \Theta_{01}(u)$.

II) $sa\,0 = 0$, $\quad ca\,0 = 1$, $\quad da\,0 = 1$.

III) $sa^2u + ca^2u = 1$, $k^2 sa^2u + da^2u = 1$, $da^2u - k^2 ca^2u = k'^2$, $sa\,iK' = ca\,iK' = da\,iK' = \infty$.

IV) $sa\,K = 1$, $ca\,K = 0$, $da\,K = k'$, $sa\,K + iK' = 1 : k$, $ca\,K + iK' = -ik' : k$, $da\,K + iK' = 0$.

V) $sa\,iK' : ca\,iK' : da\,iK' = i : 1 : k$.

VI) $sa^2u + 2K = sa^2u + 2iK' = sa^2u$, $\quad ca^2u + 2K = ca^2u + 2iK' = ca^2u$, $\quad da^2u + 2K = da^2u + 2iK' = da^2u$.

VII) $sau + 4K = sau + 2iK' = sau$, $\quad cau + 4K = cau + 2K + 2iK' = cau$, $\quad dau + 2K = dau + 4iK' = dau$.

VIII) $sau \pm 4\lambda K \pm 2\mu iK' = sau$, $\quad ca(u \pm 4\lambda K \pm \mu(2K + 2iK')) = cau$, $\quad dau \pm 2\lambda K \pm 4\mu iK' = dau$.

IX) $sa - u = -sau$, $\quad ca - u = cau$, $\quad da - u = dau$.

X) $sau - K = -cau : dau$, $\quad cau - K = k'sau : dau$, $\quad dau - K = da\,K - u = k' : dau$.

XI) $sau + K = sa\,K - u = cau : dau$, $\quad cau + K = -ca\,K - u = -k'sau : dau$, $\quad dau + K = k' : dau$.

XII) $sau \pm 2K = -sau$, $\quad cau \pm 2K = -cau$, $\quad da \pm 2K = dau$.

XIII) $sa\,2K - u = sau$, $\quad ca\,2K - u = -cau$, $\quad da\,2K - u = dau$.

XIV) $sau \pm iK' = 1 ; ksau$, $\quad cau + iK' = \pm dau : iksau$, $\quad dau \pm iK' = \pm cau : isau$.

XV) $sau \pm 2iK' = sau$, $\quad cau \pm 2iK' = -cau$, $\quad da(u \pm 2iK') = -dau$.

XVI) $sau + K + iK' = dau : kcau$, $\quad cau + K + iK' = k' : ikcau$, $\quad dau + K + iK' = ik'sau : cau$.

Für $q = 0$, $\tau = -\infty$ ist $2K = \pi$ und

XVII) $\Theta(u) = 1$, $\Theta_{01}(u) = 1$, $\Theta_{10}(u) : \sqrt[4]{q} = 2\cos u$, $\Theta_{11}(u) : \sqrt[4]{q} = 2\sin u$, $\Theta_{10} : \Theta\sqrt[4]{q} = \sqrt{k} : \sqrt[4]{q} = 2$,
$\Theta_{01} : \Theta = \sqrt{k'} = 1$, $sau = \sin u$, $cau = \cos u$, $dau = 1$.

§ 56. **Die Additionstheoreme. Der Lemniscatenbogen.** Die Additionstheoreme der Functionen sau, cau, dau sind bez. von den Additionstheoremen der Functionen $S(u)$, $C(u)$, $D(u)$ nicht verschieden. Von den folgenden Formeln ist deshalb im Grunde nur eine noch zu beweisen, die übrigen haben den Werth einer Zusammenstellung. Es ist die Formel VII). Aus der Formel V) folgt

$$dau\,dav = da(u+v)\,(1 - k^2 sa^2u\,sa^2v) + k^2\,sau\,sav\,cau\,cav.$$

Setzt man dies in die Formel III) für $ca(u+v)$ ein, so ergiebt sich die Formel VII). Die letzte Formel wird durch die Additionstheoreme erhalten, wenn erst $u + 2u$ für $3u$ und dann $u + u$ für u gesetzt wird. N ist in den folgenden Formeln eine Abkürzung für $1 - k^2 sa^2u\,sa^2v$.

I) $sa(u \pm v) = (sau\,cav\,dav \pm sav\,cau\,dau) : N$, $\quad sa(u+v)\,sa(u-v) = (sa^2u - sa^2v) : N$,

II) $sa(u+v) + sa(u-v) = 2\,sau\,cav\,dav : N$, $\quad sa(u+v) - sa(u-v) = 2\,cau\,dau\,sav : N$,

III) $ca(u \pm v) = (cau\,cav \mp sau\,sav\,dau\,dav) : N$, $\quad ca(u+v) + ca(u-v) = 2\,cau\,cav : N$,

IV) $ca(u+v) - ca(u-v) = -2\,sau\,sav\,dau\,dav : N$, $\quad 1 + ca(u+v)\,ca(u-v) = (ca^2u + ca^2v) : N$,

V) $da(u \pm v) = (dau\, dav \mp k^2 sau\, sav\, cau\, cav) : N,$ $\quad da(u+v) + da(u-v) = 2\, dau\, dav) : N,$

VI) $da(u+v) - da(u-v) = -2k^2 sau\, sav\, cau\, cav : N,$ $\quad 1 + da(u+v)\, da(u-v) = (da^2u + da^2v) : N,$

VII) $ca(u \pm v) = cau\, cav \mp sau\, sav\, da(u \pm v),$

VIII) $sa\,2u = 2\, sau\, cau\, dau : (1 - k^2 sa^4 u),$

IX) $ca\,2u = (ca^2u - sa^2u\, da^2u) : (1 - k^2 sa^4 u) = ca^2u - sa^2u\, da\,2u,$

X) $sa^2u = (1 - ca\,2u) : (1 + da\,2u), \quad ca^2u = (ca\,2u + da\,2u) : (1 + da\,2u),$

XI) $da^2u = (k'^2 + da\,2u + k^2 ca\,2u) : (1 + da\,2u), \quad da\,2u = (da^2u - k^2 sa^2u\, ca^2u) : (1 - k^2 sa^4u),$

XII) $sa\,3u = sau\,[3 - 4(1+k^2) sa^2u + 6k^2 sa^4u - k^4 sa^8u] : [1 - 6k^2 sa^4u + 4k^2(1+k^2) sa^6u - 3k^4 sa^8u].$

Nimmt man v unendlich klein, so folgt

XIII) $\dfrac{d\,sau}{du} = sa'u = cau\, dau, \quad \dfrac{d\,cau}{du} = ca'u = -sau\, dau, \quad \dfrac{d\,dau}{du} = da'u = -k^2 sau\, cau.$

Die Gleichung der Lemniscate in rechtwinkligen Coordinaten (x, y) ist $(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$ Der Radiusvector werde mit r, und der Winkel (r, x) mit t bezeichnet. Die Coordinaten der Lemniscate lassen sich eindeutig durch die elliptischen Functionen sa, ca, da ausdrücken. Setzt man nämlich, nachdem der Massstab der Einfachheit halber so gewählt worden ist, dass $c = 1$ wird, $x = ca\lambda\, da\lambda$, $y = sa\lambda\, da\lambda$, und nimmt den Modul k dieser elliptischen Functionen gleich $\sqrt{2}$ an, so ist die Lemniscatengleichung erfüllt. Das Bogenelement ist nun

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\lambda^2 \{(-2\, sa\lambda\, ca^2\lambda - sa\lambda\, da^2\lambda)^2 + (-2\, sa^2\lambda\, ca\lambda + ca\lambda\, da^2\lambda)\} \\ &= d\lambda^2 \{ sa^2\lambda (2 ca^2\lambda + da^2\lambda)^2 + ca^2\lambda(-2 sa^2\lambda + da^2\lambda)^2 \} = d\lambda^2 \{ 4 sa^2\lambda\, ca^2\lambda (ca^2\lambda + sa^2\lambda) + da^4\lambda\, (sa^2\lambda + ca^2\lambda) \} \\ &= d\lambda^2 (4 sa^2\lambda\, ca^2\lambda + da^4\lambda) = d\lambda^2 (4 sa^2\lambda - 4 sa^4\lambda + 1 - 4 sa^2\lambda + 4 sa^4\lambda) = d\lambda^2, \quad ds = d\lambda. \end{aligned}$$

Ist also s die Länge des Lemniscatenbogens vom Punkte $y = 0$, $x = 1$ an gemessen, so ist

$$x = cas\, das, \quad y = sas\, das, \quad r = das, \quad \cos t = x : r = cas, \quad \sin t = y : s = sas.$$

Sind nun zwei Bogen, s_1, s_2, gegeben, und sind die Winkel der Radiusvectoren ihrer Endpunkte t_1, t_2, so sind $\sin t_1$, $\sin t_2$, $\cos t_1$, $\cos t_2$ und auch $\sqrt{1 - 2\sin^2 t_1}$, $\sqrt{1 - 2\sin^2 t_2}$ gegeben. Mithin ist auch der Bogen $s_3 = s_1 + s_2$ durch die Gleichung

$$sa\, s_3 = \sin t_3 = \frac{sas_1\, cas_2\, das_2 + sas_2\, cas_1\, das_1}{1 - 2 sa^2 s_1\, sa^2 s_2} = \frac{\sin t_1 \cos t_2 \sqrt{1 - 2\sin^2 t_2} + \sin t_2 \cos t_1 \sqrt{1 - 2\sin^2 t_1}}{1 - 2\sin^2 t_1 \sin^2 t_2}$$

gegeben, und es lässt sich, weil in dem Ausdruck für $\sin t_3$ nur Quadratwurzeln von $\sin t_1$, $\sin t_2$ vorkommen, der Winkel t_3 mit Hülfe von Zirkel und Lineal construiren. Ebenso folgt aus der Gleichung X), dass man den Lemniscatenbogen mit Zirkel und Lineal halbiren könne. Beginnen die Bogen nicht im Punkte $x = 1$, $y = 0$, so können sie mittels des Additionstheorems dahin verlegt werden.

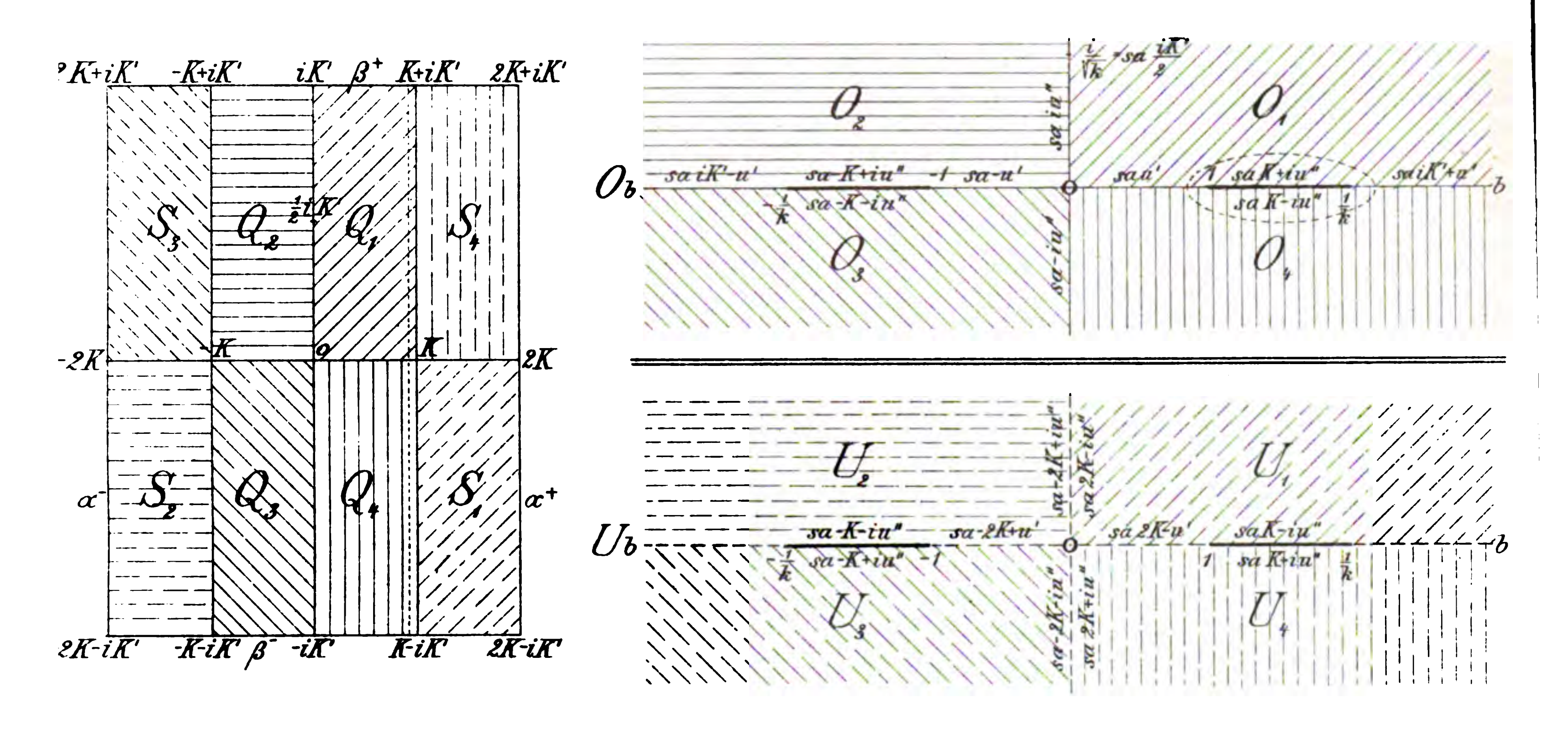
§ 57. **Verlauf der Function** sau **für ein reelles** τ. Für die Anwendung der elliptischen Functionen sind zwei Fälle besonders wichtig. Erstens der, in welchem τ eine rein reelle, natürlich negative Zahl ist, und zweitens der, in welchem τ sich von einer solchen nur um $i\pi$ unterscheidet. Im ersten Falle, den wir zuerst betrachten, ist q positiv, im zweiten Falle negativ, jedesmal dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins.

Ist also zuerst q positiv, so folgt aus der Gleichung

$$\Theta_{01} : \Theta = \sqrt{k'} = \mathfrak{P}(1 - q^{2n+1})^2 : (1 + q^{2n+1})^2,$$

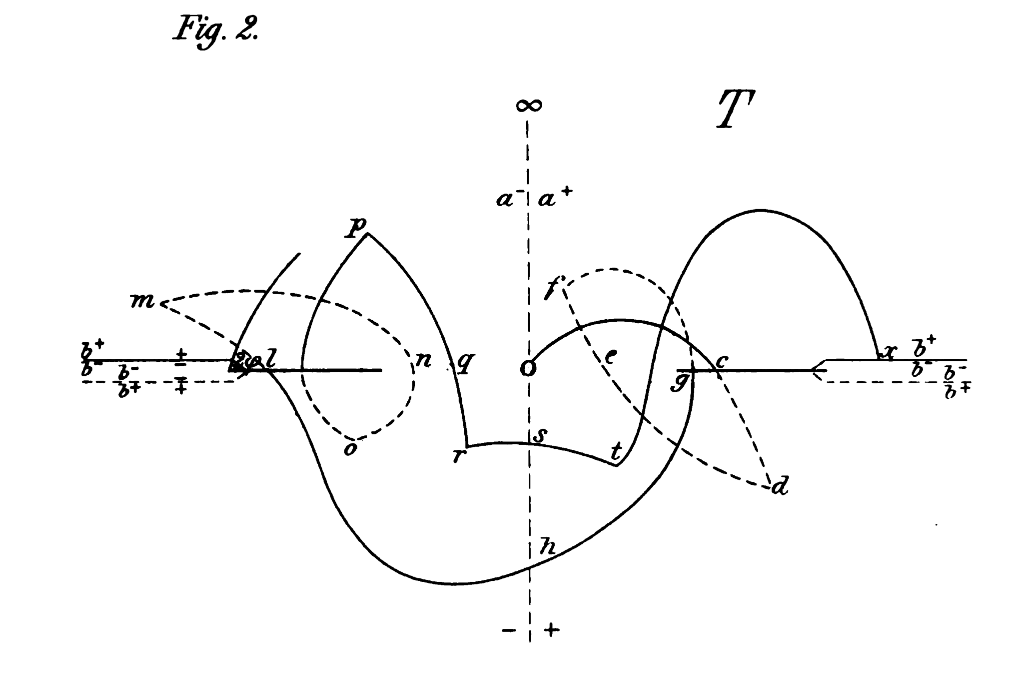
dass die positiv reelle Grösse $\sqrt{k'}$ mit wachsendem q fortwährend abnimmt, für $q = 0$ den Werth 1, für $q = 1$ den Werth 0 erhält. *Wächst demnach q von 0 bis 1, so nimmt $\sqrt{k'}$ jeden Werth zwischen 1 und 0 einmal und nur einmal an.* Der Modul k der elliptischen Functionen wird aus $\sqrt{k'}$ algebraisch definirt als gleich $\sqrt{1 - k'^2}$, ist aber auch zugleich durch q transcendent, durch die Gleichung $\Theta_{10}^2 : \Theta^2 = k$ bestimmt. Denken wir in Θ_{10} den Factor $\sqrt[4]{q} = e^{\frac{1}{4}\tau}$ positiv reell, so ist k eine positive Grösse und kleiner als Eins. Aus dem schon bekannten Verlauf für $\sqrt{k'}$ folgt für k: *Wächst q von 0 bis 1, so nimmt k jeden Werth zwischen 0 und 1 einmal und nur einmal an. Es giebt demnach für jedes reelle $k < 1$ ein und nur ein reelles $q < 1$, welches die Gleichung befriedigt $\Theta_{10}^2 : \Theta^2 = k$.* Dass ausserdem noch complexe Werthe von q die Gleichung befriedigen, ergiebt sich später. Für jedes reelle u sind die vier Thetafunctionen, wie der blosse Anblick ihrer Darstellungen lehrt, reell, für rein imaginäre u sind $\Theta(u)$, $\Theta_{01}(u)$,

Fig. 1.



$o \leqq u' \leqq K; \qquad o < u'' < K'$

Fig. 2.



$\Theta_{10}(u)$ reell, $\Theta_{11}(u)$ aber ist rein imaginär, und zwar für sehr kleine Werthe von u positiv imaginär. Beachten wir nun, dass die Summe der Werthe, für welche $sa\,u$ in einem Elementarparallelogramme denselben Werth annimmt, nach den Moduln $4K$, $2iK'$ congruent $2K$ ist, so ergiebt sich, dass $sa\,u$ für Werthe von u zwischen 0 und K keinen Werth zweimal annehmen kann, und daher mit u fortwährend wächst. Für $u=0$ ist $sa\,u=0$, für $u=K$ ist $sa\,u=1$. Aus gleichem Grunde kann $sa\,u$ zwischen K und $2K$ keinen Werth zweimal annehmen, und es nimmt $sa\,u$ in diesem Intervalle fortwährend von 1 bis 0 ab, weil $sa\,2K=0$ ist, was auch aus der Gleichung $sa\,K+u=sa\,K-u$ geschlossen werden kann, aus der die völlige Symmetrie des Auf- und Absteigens der Werthe der Function $sa\,u$ sich ergiebt. — Der Verlauf zwischen 0 und $-2K$ wird aus der Gleichung $sa-u=-sa\,u$ erkannt, und der weitere für reelle u aus der Periodicität. Stellt man diesen Verlauf graphisch dar, indem man in Cartesianischen Coordinaten die Curve construirt $y=sa\,x$, so ähnelt die erhaltene Curve sehr der Linie $y=sin\,x$, der Sinuslinie. Ihre höchsten Stellen liegen um $4K$, ihre tiefsten ebenfalls um $4K$ von einander entfernt, die grössten und kleinsten Ordinaten sind ± 1. Die Curve liegt abwechselnd über und unter der Abscissenachse, und sind die Stücke oberhalb den Stücken unterhalb symmetrisch congruent. Construirt man die den beiden Gleichungen $y=sa\,x$ und $y=sin(\pi x:2K$ entsprechenden Curven, so stimmen sie in den höchsten und tiefsten und in den Schnittpunkten mit der Abscissenachse überein, und ihre Ordinaten sind für gleiche Abscissen gleichzeitig positiv und negativ.

Für positiv imaginäre Werthe von u zwischen 0 und iK' ist $sa\,u$ positiv imaginär und wächst mit u fortwährend, bis $sa\,u$ bei iK' unendlich gross wird. Es kann nämlich auf dieser Linie $sa\,u$ keinen Werth zweimal annehmen, weil die Summe zweier Zahlen, deren Träger auf ihr liegen, niemals congruent $2K$ ist, deshalb muss u fortwährend zunehmen. Für negativ imaginäre u nimmt $sa\,u$ negativ imaginäre Werthe an und wird bei $-iK'$ unendlich gross. Wir setzen $sa\,u=z$ und tragen die Werthe, die z annimmt, wenn u sich in einem Elementarparallelogramm bewegt, auf die z-Ebene auf. (Dazu ist die Figur 1 der angehängten lithographischen Tafel zu vergleichen.) Es sei u' eine reelle Zahl zwischen 0 und K, und u'' eine ebensolche zwischen 0 und K'. Durchläuft u die Werthe u' von 0 bis K, so durchläuft $z=sa\,u$ die Werthe zwischen 0 und 1, der Punkt $z=x+yi$ durchläuft die Punkte der positiven x-Achse zwischen 0 und 1, ohne umzukehren. Ist

$$sa\,u=sa\,K+iu''=ca\,iu'':da\,iu''=\Theta_{10}(iu''):\sqrt{k}\,\Theta(iu'')$$

(Gl. XI § 55), so ist z reell und hat den Werth $1:k$ für $u''=K'$. Kein Werth kann zweimal angenommen werden, wenn u'' von 0 bis K' wächst, und folglich durchläuft z die reelle Achse von 1 bis $1:k$, ohne umzukehren. Diese Strecke ist in der Figur stark gezeichnet, weil sie noch einer zweiten Linie im Parallelogramm P der u-Ebene entspricht, nämlich der Strecke zwischen K und $K-iK'$. Es empfiehlt sich im ersten Falle, d. h. wenn u die Linie $K\ldots K+iK'$ durchläuft, den Werthen von $sa\,u$ das obere Ufer, im zweiten Falle aber, wenn u die Linie $K\ldots K-iK'$ durchläuft, den Werthen von $sa\,u$ das untere Ufer derselben Linie entsprechen zu lassen. — Ist $sa\,u=sa\,iu''$, so durchläuft z ohne umzukehren die positiv imaginäre Achse, wenn u'' von 0 bis K' wächst; der Linie von 0 bis iK' der u-Ebene entspricht die positiv imaginäre Achse der z-Ebene, der Linie von 0 bis $-iK'$ die negative. — Ist $sa\,u=sa\,K+iK'-u'=da\,u':k\,ca\,u'=\sqrt{k}\,\Theta(u'):\Theta(u')$ (Gl. XVI § 55), und durchläuft u' die Werthe von 0 bis K, u daher die Linie von $K+iK'$ bis iK', so ist z reell. Kein Werth kann auf diesem Wege zweimal angenommen werden, deshalb durchläuft z die x-Achse ohne umzukehren von $1:k$ wachsend bis ins Unendliche. Dieselben Werthe nimmt $sa\,u$ auf der Linie von $K-iK'$ bis $-iK'$ an, gleichwohl ist die Linie $1:k$ bis ∞ in der Zeichnung nicht stark ausgeführt, weil von den beiden in der u-Ebene ihr entsprechenden Linien nach unsern früheren Festsetzungen nur eine zum Periodenparallelogramm gehört, ihr also nur eine Linie entspricht. Der Begrenzung des Rechtecks Q_1 der u-Ebene entspricht die Begrenzung desjenigen vierten Theiles der z-Ebene, der zwischen der positiv reellen und der positiv imaginären Achse liegt, und der in der Figur 1 (rechts) mit O_1 bezeichnet ist. Den Punkten im Innern von Q_1 entsprechen die Punkte im Innern von O_1 ein-eindeutig. Denn es wächst $lg(z_0-sa\,u)=lg(z_0-z)$ um so viele Multipla von $2\pi i$, als die Function $z_0-sa\,u$ in Q_1 Nullstellen hat, wenn u um die Begrenzung von Q_1 positiv herumgeführt wird. Dabei durchläuft aber z einmal die Begrenzung der Viertelebene O_1, woraus man sofort erkennt, dass $lg(z_0-z)$ um $2i\pi$ wächst, wenn z_0 in Q_1 liegt, um

$0.ix$, wenn z nicht in Q_1 liegt. Also nimmt sau den Werth z_0, wenn er in O_1 liegt, einmal und nur einmal an. Da die Begrenzung der Viertelebene O_1 sich ins Unendliche erstreckt, so ist der Punkt iK' durch einen kleinen Viertelkreis, der Punkt ∞ der z-Ebene durch einen sehr grossen entsprechenden Viertelkreisbogen auszuschliessen. Dass aber wirklich dem sehr kleinen Kreise um iK' ein sehr grosser Kreis, oder vielmehr eine von der Kreisform beliebig wenig abweichende Linie entspricht, folgt aus der Möglichkeit einer Reihenentwickelung von $sa(u+iK')$ nach aufsteigenden Potenzen von u, die mit der -1ten Potenz beginnt. — Es kann der Satz von der Eindeutigkeit des Entsprechens aber auch aus der Zerlegung von $sau = sa(u'+iu'')$ in seinen reellen und imaginären Bestandtheil mittels des Additionstheorems erwiesen werden. — Dem Rechteck Q_4 mit den Ecken 0, K, $K-iK'$, $-iK'$ entspricht die Viertelebene O_4, die von der positiv reellen und negativ imaginären Achse eingeschlossen wird, ein-eindeutig, in welcher Beziehung nur die Linien von 1 bis $1:k$ und von $1:k$ bis ∞ eine besondere Bemerkung nöthig machen. Das obere und untere Ufer der Linie von 1 bis $1:k$ entspricht zwei ganz verschiedenen Linien der u-Ebene, die Linie $K \ldots K+iK'$ dem obern, die Linie $K \ldots K-iK'$ dem untern Ufer, und daher wird die Ein-eindeutigkeit nur erst durch die Spaltung der Linie $1 \ldots 1:k$ in zwei Ufer hergestellt. Dem obern und untern Ufer der Linie von $1:k$ bis ∞ entsprechen bez. die Linien von iK' bis $iK'+K$ und von $-iK'$ bis $-iK'+K$. Diese Linien sind aber in dem Elementarparallelogramm P mit den Ecken $-2K-iK'$, $+2K-iK'$, $2K+iK'$, $-2K+iK'$ gegenüberliegende Seiten und Träger von Zahlen, die einander nach dem Periodicitätsmodul iK' congruent sind, und da von diesen Linien nur die eine (die untere) zum Parallelogramm zu rechnen ist, so entspricht der Linie $1:k \ldots \infty$ nur eine Linie in P, und die Ein-eindeutigkeit ist auch ohne Spaltung der Linie in zwei Ufer vorhanden. — Die Beziehung $sa-u = -sau$ lässt erkennen, dass das Rechteck Q_3 der Viertelebene O_3 ein-eindeutig entspricht, und dem Rechteck Q_2 die Viertelebene O_2, wo nur wieder die Linie von -1 bis $-1:k$ in ihre Ufer zu spalten ist. In der Figur ist das Entsprechen der Rechtecke und Viertelebenen durch gleichartige Schattenstriche angedeutet.

Das Rechteck $Q_1+Q_2+Q_3+Q_4$ bildet sich durch die Beziehung $sau = z$ auf die ganze z-Ebene ein-eindeutig ab, nur für die Begrenzung müssen besondere Festsetzungen getroffen werden, wenn die Ein-eindeutigkeit aufrecht erhalten werden soll, denn der Strecke zwischen K und $K+iK'$ und der zwischen K und $K-iK'$ einerseits und der Strecke zwischen $-K$ und $-K+iK'$ und $-K$ und $-K-iK'$ andrerseits entsprechen bez. dieselben Linien, den ersten beiden Strecken die Linie von 1 bis $1:k$, den letzten beiden die Linie von -1 bis $-1:k$ der z-Ebene. Die Ein-Eindeutigkeit wird hergestellt, wenn man den oberen Strecken die oberen Ufer, den unteren Strecken die unteren Ufer dieser Linien entsprechen lässt. Den Strecken von $-K+iK'$ bis $+K+iK'$ und von $-K-iK'$ bis $+K-iK'$ entspricht ebenfalls nur eine Linie, nämlich die Linie b, die mit der reellen Achse von $1:k$ bis ∞ und der negativ reellen Achse von ∞ bis $-1:k$ zusammenfällt, und die nach den hier geltenden Vorstellungen über die Ebene als **ein** Zug anzusehen ist. Da aber die Linie $-K+iK' \ldots K+iK'$ gar nicht zum Parallelogramm zu rechnen ist, so tritt längs l eine Störung der Ein-eindeutigkeit nicht ein, gleichwohl spricht man auch bei ihr oft von den beiden Ufern, weil man offenbar sich dem oberen Ufer von b nähert, wenn man u an die obere Begrenzung der Parallelogramme heranführt, und weil sich z dem unteren Ufer von b nähert, wenn man u der unteren Begrenzung des Parallelogramms zuführt. Das Elementarparallelogramm P enthält nun aber noch die Theilrechtecke S_1, S_2, S_3, S_4. Die Abbildung derselben hat in der z-Ebene, in welcher die Bilder der Q aufgetragen wurden, keinen Platz mehr. Wir nennen die schon bedeckte Ebene O und nehmen noch eine zweite z-Ebene zu Hilfe, die wir mit U bezeichnen wollen, und bilden die S auf ihr ab. Legen wir U so unter O, dass die Coordinatenkreuze zusammenfallen, so soll unter O_1 die Viertelebene U_1, unter O_2, O_3, O_4 sollen bez. U_2. U_3, U_4 liegen. Die Untersuchung über das Entsprechen der Gebiete S_μ und U_μ braucht nicht neu durchgeführt zu werden, weil sie mittels der Gleichung $sa\,2K-u = sa-2K-u = sau$ auf die frühere Untersuchung zurückgeführt werden kann, indem jedem Punkt in den Rechtecken S ein Punkt $2K-u$ oder $-2K-u$ in den Rechtecken Q entspricht, in dem z denselben Werth hat. Liegt u in Q_1, so liegt $-u$ in Q_3 und $2K-u$ in dem Rechteck mit den Ecken K, $2K$, $2K-iK'$, $K-iK'$, welches mit S_1 in der Figur bezeichnet ist. Diesem

Rechteck entspricht die Viertelebene U_1, dem Rechteck S_4 entspricht die Viertelebene U_4, S_2, S_3 entsprechen bez. U_2 und U_3. Die den Rechtecken S entsprechenden Werthe von z bedecken die Ebene U vollständig und wieder überall nur einfach, wenn man die Begrenzung in der z-Ebene an einzelnen Stellen in zwei Ufer spaltet. Es ist dies an denselben Linien nöthig als vorhin in der Ebene O, nämlich an den Linien $1 \ldots 1:k$ und $-1 \ldots -1:k$, deren obere Ufer bez. den Strecken $K \ldots K-iK'$ und $-K \ldots -K-iK'$, deren untere bez. den Strecken $K \ldots K+iK'$ und $-K \ldots -K+iK'$ entsprechen. Der reellen Achse in U von $1:k$ bis ∞ bis $-1:k$, welche Linie wir wieder mit b bezeichnen, entsprechen die Strecken von $-2K+iK'$ bis $-K+iK'$ und von $K+iK'$ bis $2K+iK'$ und von $-2K-iK'$ bis $-K-iK'$ und von $K-iK'$ bis $2K-iK'$, von denen die oberen nicht mit zum Elementarparallelogramm P zu rechnen sind. Nähert man sich im Rechteck S_4 oder S_3 der obern Begrenzung, so nähert sich z der Linie b von unten; wollte man daher die obere Begrenzung von P mit zum Parallelogramm rechnen, so würde die Ein-eindeutigkeit längs b nur durch Spaltung dieser Linie in zwei Ufer aufrecht erhalten werden können, während dies nicht nöthig ist, wenn man eben nur die eine der beiden gegenüberliegenden Seiten von P zu dem Parallelogramm hinzurechnet. Hierzu kommen aber noch zwei verschiedene Linien der u-Ebene, die nur einer Linie in U entsprechen, es sind die mit α^- und α^+ bezeichneten Parallelogrammseiten, welche beide der imaginären Achse der Ebene U entsprechen, die wir mit a, ihre Ufer mit a^+, a^- bezeichnen wollen. Nun ist aber α^+ nicht mit zu P zu rechnen, so dass also a nur α^- entspricht. Gleichwohl spricht man auch hier von den beiden Ufern der Linie a, weil man sich in U mit z dem Ufer a^+ nähert, wenn u an α^+ herangeführt wird, und a^-, wenn u an das Ufer α^- herangeführt wird.

Zur vollständigen Abbildung des Parallelogrammes P haben wir also zwei über der z-Ebene liegende Blätter O und U nöthig, und zur vollständigen Herstellung der Ein-eindeutigkeit zwischen den Bildern war nur erforderlich, wenigstens wenn man nur zwei zusammenstossende Seiten zum Parallelogramm hinzurechnet, die Linien zwischen 1 und $1:k$ und zwischen -1 und $-1:k$ in zwei Ufer zu spalten. Zur völligen Ein-eindeutigkeit von Bild und Original kann man gelangen, wenn man die beiden Blätter O und U zu einer Riemann'schen Fläche zusammenfügt.

§ 58. Die zur Beziehung $sa\,u = z$ gehörige Riemann'sche Fläche. Wir legen U so unter O, dass die Coordinatenkreuze zusammenfallen. Das obere Ufer der Linie von 1 bis $1:k$ in O lassen wir mit dem unteren Ufer der Linie zwischen 1 und $1:k$ in U zusammenfliessen. Gehen wir in der u-Ebene über die Linie $K \ldots K+iK'$ von links nach rechts hinweg, so gehen wir in dem System der beiden z-Ebenen aus dem obern Blatte über die Linie $1 \ldots 1:k$ hinweg ins untere Blatt. Ebenso verbinden wir das untere Ufer der Linie $1 \ldots 1:k$ in O mit dem obern der entsprechenden Linie in U, wobei eine Durchsetzung des einen Flächenastes durch den andern längs der Linie $1 \ldots 1:k$ gedacht werden muss. Führt man u aus S_1 nach Q_4, so bewegt sich z stetig aus U_1 nach O_4 von oben nach unten, man gelangt aus dem untern Blatte in das obere. Die Linie von 1 bis $1:k$ pflegt man eine Durchsetzungslinie des Systems der beiden Ebenen, der Riemann'schen Fläche zu nennen. Macht man einen Schnitt durch die Fläche, senkrecht zur Durchsetzungslinie, so bietet dieser Schnitt das Aussehen der folgenden Figur:

Die Linie, an der die Durchsetzung statt hat, ist nicht als eine Linie zu denken, sondern als zwei, weil sie eben zwei sich durchdringenden Aesten angehört, ähnlich wie ein Doppelpunkt einer Curve zwei verschiedene Punkte repräsentirt, die verschiedenen Curvenzweigen angehören. Das räumliche Zusammenfallen der beiden Linien ist als ein zufälliges anzusehen, und es müssen zwei Punkte, die in ihr auf einen fallen, ebenso als zwei gänzlich verschiedene angesehen werden, als zwei wo anders über einander liegende Punkte der Fläche. Spricht man von unendlich nahe benachbarten Punkten der Fläche, so meint man stets solche, die durch einen stetigen sehr kleinen Zug im Blättersystem mit einander verbunden werden können, und nicht etwa übereinander liegende, die ja nur durch einen längern über die Durchsetzungslinie führenden Zug verbunden werden können. Ebenso wenig aber sind zwei zusammenfallende Punkte der Durchsetzungslinie benachbart, wenn sie in Linien liegen, die verschiedene Flächenäste mit einander verbinden. Es wird sich später zeigen, dass man diese Linie

auch deformiren kann, wenn man nur ihre Endpunkte festhält, ohne dadurch die Riemann'sche Fläche wesentlich zu ändern, doch wollen wir davon vorläufig absehen.

Ebenso wie die Blätter O und U längs der Linie $1 \ldots 1:k$ verbunden werden, verbinden wir sie längs der Linie -1 bis $-1:k$, die eine zweite Durchsetzungslinie der Riemann'schen Fläche wird. Diese Riemann'sche Fläche T, um sie noch einmal zu beschreiben, besteht demnach aus zwei übereinander liegenden Ebenen oder Blättern, die man auch Zweige nennt; diese hängen längs der zwei Durchsetzungslinien von 1 bis $1:k$ und von -1 bis $-1:k$ mit einander zusammen, die Blätter sind dort mit einander verwachsen. Jedes Blatt ist Träger der Zahlen z. Führt man z in T um einen der vier Punkte $+1$, -1, $+1:k$, $-1:k$ herum zur Anfangslage zurück, so geht z allemal über eine der beiden Durchsetzungslinien hinweg, und z gelangt daher aus einem Blatte zu dem entsprechenden Punkte des andern Blattes, durch einen zweiten Umgang um denselben oder einen andern dieser Punkte aber gelangt z in seine Anfangslage zurück. (In der Figur 2 der angehängten lithographischen Tafel, in der die rechte Seite die Riemann'sche Fläche darstellt, sind die Linien im oberen Blatte ausgezogen, im unteren punctirt.) Man nennt diese Punkte deshalb Verzweigungspunkte, weil eben sich die Fläche um sie herum, gewissermassen in einem unendlich kleinen Schraubengange, aus einem Zweige in den andern fortsetzt. Weil der Weg von z, wenn man einen solchen zweimal umkreist, sich um den Punkt herab und herauf windet, so ist auch der Name Windungspunkt für einen solchen Punkt gäng und gäbe. Kein anderer Punkt unserer Fläche theilt diese Eigenschaft, und es hat demnach unsere Fläche T vier Windungs- oder Verzweigungspunkte. Das Elementarparallelogramm P steht nun zu den Punkten dieser Fläche in einer völlig ein-eindeutigen Beziehung. Denn die Strecken zwischen K und $K+iK'$ und zwischen K und $K-iK'$, welche früher in O sowohl als in U derselben Linie entsprachen, die wir durch Unterscheidung ihrer Ufer gewissermassen spalteten, entsprechen nun verschiedenen Linien in T. Zwar fallen diese auch hier räumlich zusammen, aber dies ist so zu sagen nur zufällig. Die eine von ihnen verbindet zwei andere Flächenzweige als die zweite, und sie sind eben deshalb als völlig verschiedene Linien aufzufassen, sie sind nur die Marken für den Ort der Durchdringung verschiedener Flächenstücke.

Die beiden Linien b in O und U stossen in T in den Verzweigungspunkten $1:k$ und $-1:k$ zusammen und bilden in T einen einzigen continuirlichen Zug. Die Punkte derselben entsprechen der mit β^- in der Figur bezeichneten Seite des Parallelogramms, zu welchem β^+ gar nicht mit zu rechnen ist. Der Linie a, die im untern Blatte von T verläuft, entspricht die mit α^- bezeichnete Seite von P. Jedem Punkte von T entspricht ein und nur ein Punkt von P und umgekehrt. Betrachtet man aber die ganze Begrenzung von P und sucht die ihr entsprechenden Linien in T, so müssen wieder die beiden Ufer von a und b herangezogen werden, weil ihnen zusammen die ganze Begrenzung von P entspricht.

Benachbarten Puncten in T entsprechen im Allgemeinen benachbarte Punkte in P. Liegen die benachbarten Punkte aber auf entgegengesetzten Ufern der Linien a oder b, so entsprechen ihnen in P Punkte, deren zugehörige Zahlen noch um einen Periodicitätsmodul von einander verschieden sind, die an gegenüberliegenden Parallelogrammseiten liegen. Die Function $sa\,u$ lässt sich aber über das Rechteck hinaus stetig fortsetzen. Führt man z. B. u über die Seite β^+ von P hinweg in ein Parallelogramm P_{01} mit den Ecken $-2K+iK'$, $2K+iK'$, $2K+3iK'$, $-2K+3iK'$, so erhält man wegen der Periodicität von $sa\,u$ dieselben Werthe von z durch Abbildung wieder, als die welche durch die Abbildung von P erhalten wurden. Die ganze Fläche T wird ein zweites Mal erhalten. Der Linie β^+ entspricht in T die Linie b oder besser das Ufer b^+ derselben. Geht u stetig über β^+, so geht z stetig über b. Führt man ebenso u stetig über die Linie α^+ hinweg in das Rechteck P_{10} mit den Ecken $2K-iK'$, $6K-iK'$, $6K+iK'$, $2K+iK'$, so bildet sich auch dieses Rechteck wieder auf die Fläche T ab, dem Ueberschreiten von α^+ mit u entspricht das Ueberschreiten von z über a von α^+ nach α^- hin. Indem man u auch noch über die andern Seiten des ersten Parallelogrammes P in andere Parallelogramme stetig führt und ungleich z stetig ändert, und weiter über die Seiten der neuen congruenten Parallelogramme wieder in neue Parallelogramme, und jedes durch z abbildet, so erhält man die Fläche T wieder und wieder, unendlich oft. Da aber zur Kenntniss der Function $sa\,u$ ein Parallelogramm P genügt, so

genügt es auch nur ein Bild, eine Fläche T zu betrachten. Der gesammten Berandung von P entsprechen die Linien a und b in T, man nähert sich aber mit z in T a^+, a^-, b^+, b^-, wenn man sich in P mit u den Seiten α^+, α^- nähert, wir lassen deshalb gegenüberliegenden Begrenzungsstücken gegenüberliegende Ufer der Linien a b in T entsprechen, und erreichen durch diese Spaltung in Ufer, dass wieder Ein-eindeutigkeit der Beziehung zwischen P und der durch a b begrenzten und deshalb zur Unterscheidung von der unbegrenzten Fläche T mit einem Strich, also mit T' bezeichneten Fläche besteht. Die Linien a und b heissen Querschnitte von T und zerschneiden eben T in T'. Was die Wahl der Bezeichnung ihrer Ufer mit $+$ $-$ angeht, so halten wir an dem nützlichen Gebrauch fest, bei Ziehung einer Linie das linke Ufer als das positive, das andere als das negative anzusehen. Wir denken a von $+i\infty$ zu $-i\infty$ längs der imaginären Achse im untern Blatte gezogen, dann liegen die positiven x auf der positiven Seite von a. Die Linie a bildet einen einzigen Zug, weil die Blätter von T wie die z-Ebene als im Unendlichen geschlossen gedacht werden. Die beiden Ufer aber bilden nun von einander getrennte continuirliche Züge. Wir lassen die Linie b auch im untern Blatte auf dem positiven Ufer von a, da wo die positiv reelle Achse die Linie a im Unendlichen trifft, beginnen, und führen sie längs der reellen Achse im untern Blatte bis zum Punkt $1:k$. (In der Zeichnung ist die Linie ein wenig unterhalb der reellen Achse dargestellt, der folgende obere Theil etwas über der reellen Achse, nur um sie für das Auge von einander zu trennen.) Um $1:k$ führen wir b (etwa in in einem kleinen Kreise herum) ins obere Blatt, von da längs der positiv reellen Achse ins Unendliche, und von da längs der negativen reellen Achse bis zum Punkt $-1:k$, um denselben herum ins untere Blatt, längs der negativen reellen Achse bis ins Unendliche an den Punkt zurück, welcher dem Anfangspunkt von b auf dem negativen Ufer von a gegenüberliegt. Die beiden Ufer der Linien a und b bilden nun zusammen einen einzigen continuirlichen Zug, welcher als die Begrenzung von T' anzusehen ist. Soll eine Fläche einfach zusammenhängend sein, so muss ihre Begrenzung aus einem Stücke bestehen, welcher Satz für Flächenstücke, die nicht blos eben sind, freilich nicht umkehrbar ist. Man überzeugt sich jedoch hier unmittelbar von der Einfachheit des Zusammenhanges dadurch, dass T' eineindeutig auf ein Parallelogramm P, ein einfach zusammenhängendes Ebenenstück bezogen werden kann (vergl. § 2). Aus dieser Abbildung folgt aber auch leicht, dass die Fläche T selbst dreifach zusammenhängend ist, dass sie also jedesmal durch zwei nicht zerstückelnde Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt wird. Man denke sich das Parallelogramm P biegbar und rolle dasselbe zu einem Cylinder zusammen, indem man die Seiten β^- und β^+ aneinander biegt, und zusammenwachsen lässt. Die Linie β kann als Marke bleiben für den Ort des Zusammenwachsens, wie b als Marke dienen kann für den Ort, längs welches die Fläche T' zu T sich zusammenfügt. Einem stetigen Uebergange über β auf dem Cylinder entspricht ein solcher über b. Nun denken wir den Cylinder, dessen Enden die Linien α^- und α^+ sind, nicht blos biegbar, sondern auch dehnbar, und krümmen ihn zur Oberfläche eines körperlichen Ringes zusammen, so dass die Linien α^- und α^+ in eine, α zusammenfallen. Längs dieser Linien lassen wir die beiden Enden zusammenfliessen, und α kann noch als Marke für den Ort dieses Vorganges dienen. Auf der Ringoberfläche sind α β zwei nicht zerstückelnde Querschnitte, und sie zerschneiden die Fläche in eine einfach zusammenhängende. Einem stetigen Uebergange über α entspricht ein ebensolcher in T über a. Denken wir uns a b fort, so ist die Fläche T auf die Oberfläche des körperlichen Ringes überall eineindeutig bezogen, und der Zusammenhang der einen Fläche ist gleich dem der andern nach § 2. Ziehen wir auf der Oberfläche des Ringes einen nicht zerstückelnden Rückkehrschnitt, den wir auch Querschnitt nennen können, indem wir die Fläche zu Anfang als durch einen Punkt begrenzt denken, den wir zum Anfang und Ende des Querschnittes machen, so bilden seine Ufer nun zwei getrennte Züge. Verbindet man diese durch einen zweiten Querschnitt, so bilden die Ufer des zweiten mit denen des ersten zusammen einen continuirlichen Zug, und die durch die beiden Schnitte aufgetrennte Fläche lässt sich in der Ebene auf ein Stück ausbreiten, dessen Begrenzung aus einem continuirlichen Zuge besteht, und das also einfach zusammenhängend ist, woraus folgt, dass auch T durch jedes Paar nicht zerstückelnder Querschnitte in eine einfache zusammenhängende Fläche zerlegt wird, also dreifach zusammenhängend ist. Es ist

dies ein Satz, bei dem wir die Intuition des Lesers einigermassen in Anspruch nehmen müssen. — In der Figur 2 der Tafel sind in dem Parallelogramm P einige Linien willkürlich gezeichnet; und rechts in der Riemannschen Fläche die entsprechenden. Correspondirende Punkte tragen gleiche Buchstaben. Es ist jedoch dieser Zeichnung ein bestimmter Werth von k nicht zu Grunde gelegt, die krummen Linien rechts sind nicht näher berechnet, sondern die Figur hat nur schematischen Werth. Es ist dafür gesorgt, dass den Theilen der geraden Linie in Theilrechtecken von P Linien in den ihnen entsprechenden Viertelebenen zugewiesen sind, und dass die Winkel ungefähr richtig wiedergegeben sind.

Mittels der Formel X) des § 56 kann man die Werthe von sau für $\frac{1}{2}K$, $\frac{1}{2}iK'$ und einige andere leicht bis auf's Vorzeichen berechnen. Für reelle $k < 1$ und ein dem entsprechendes reelles q ist auch das Vorzeichen aus den angestellten Betrachtungen leicht bestimmbar. Wird der reelle Theil der Quadratwurzeln positiv genommen, so hat man

$$\text{für } u = \tfrac{1}{2}K, \quad \tfrac{1}{2}iK', \quad K+\tfrac{1}{2}iK', \quad \tfrac{1}{2}K+\tfrac{1}{2}iK', \quad \tfrac{1}{2}K-\tfrac{1}{2}iK'.$$

$$sau = \frac{i}{\sqrt{1+k'}}, \quad \frac{i}{\sqrt{k}}, \quad \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \sqrt{\frac{k+ik'}{k}}, \quad \sqrt{\frac{k-ik'}{k}}.$$

§ 59. **Winkeltreue Abbildung des Rechtecks und der Ellipse auf den Kreis.** Das Rechteck Q_1+Q_2 mit den Ecken $-K$, K, $K+iK'$, $-K+iK'$ wird durch die Beziehung $sau = z$ auf die Halbebene O_1+O_2 in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet. Die Winkeltreue ist aufgehoben in den Ecken, welche den Punkten -1, $+1$, $1:k$, $-1:k$ der z-Ebene entsprechen. Dort ist $sa'u = caudau$ = Null. Betrachten wir die Ecke K, so ist $sau = sa(K+u-K) = ca(u-K):da(u-K)$ eine gerade Function von $u-K$, und es kann deshalb $z-1$ in die Reihe

$$z-1 = a_1(u-K)^2 + a_2(u-K)^4 + a_3(u-K)^6 + \ldots$$

entwickelt werden. Schreibt man re^{ti} für $z-1$, $\varrho e^{\varphi i}$ für $u-K$, so ist für sehr kleine $u-K$ nahezu

$$(z-1):(u-K)^2 = re^{ti}:\varrho^2 e^{2\varphi i} = \text{Const.}$$

und folglich wächst t um 2ψ wenn φ um ψ wächst. Laufen daher in $u = K$ zwei Linien unter dem gegenseitigen Winkel ψ ein, so laufen ihre Bilder in der z-Ebene in den Punkt 1 unter dem gegenseitigen Winkel 2ψ ein, und dem rechten Winkel der Begrenzung des Rechtecks bei K entspricht der gestreckte der Begrenzung bei 1 in der z-Ebene. Aehnlich ist es mit den übrigen Ecken. Der Punkt $u = iK'$ entspricht dem Punkte $z = \infty$, und es kann demnach auch in ihm von Aehnlichkeit eigentlich nicht die Rede sein. Nimmt man aber (wie dies auf der Kugel der Fall sein würde) an, dass zwei gerade Linien sich im Unendlichen unter demselben Winkel schneiden, wie in ihrem im Endlichen liegenden Schnittpunkte, so wird dort die Winkeltreue aufrecht erhalten. Die Halbebene lässt sich nun bekanntlich durch reciproke radii vectores, d. h. durch lineare Abbildung verschiedentlich auf das Innere eines Kreises abbilden, und so kann man, wie Herr H. A. Schwarz bemerkt hat, das Innere des Rechtecks conform auf das Innere des Kreises abbilden, wenn nur in den Ecken die Winkeltreue aufgegeben wird. Soll der Mittelpunkt $u = \frac{1}{2}iK'$ des Rechtecks, also der Punkt $z = i:\sqrt{k}$ der Halbebene, dem Mittelpunkte des Kreises entsprechen, so bilde man die z-Ebene durch die Beziehung

$$\zeta = (i - z\sqrt{k}):(i + z\sqrt{k}), \quad z = i(1-\zeta):\sqrt{k}(1+\zeta)$$

ab, so bildet sich durch die Relation

$$\zeta = (i - \sqrt{k}\,sau):(i + \sqrt{k}\,sau) = (i\Theta_{01}(u) - \Theta_{11}(u)):(i\Theta_{01}(u) + \Theta_{11}(u))$$

das Innere des Rechtecks auf den Einheitskreis der ζ-Ebene ab. Der Ecke K entspricht der Punkt $\zeta = \frac{i-\sqrt{k}}{i+\sqrt{k}} = \frac{1-k}{1+k} + \frac{2i\sqrt{k}}{1+k}$. Ist ein Rechteck mit den Seiten $2K$, K' willkürlich vorgegeben, so muss man es erst auf ein ähnliches abbilden, weil $K'K$ in dem Abhängigkeitsverhältnisse $2K = \pi\Theta\Theta$ stehen, wenn man sich zur Abbildung des Rechtecks auf den Kreis der elliptischen Function sau bedienen will. Eine solche Zwischenabbildung aber ist nicht nöthig, wenn man zur Abbildung den Ausdruck in den Thetafunctionen wählt, oder sau durch die Function $S(u)$ des § 42 ersetzt. Einer besonders eleganten Behandlung ist das Quadrat fähig, welche wir an späterer Stelle geben.

Herr Schwarz giebt in Crelle's Journal B. 70 auch noch die Abbildung der Ellipse auf den Kreis durch die Beziehung

$$z = sa\frac{2K}{\pi} arcsin u.$$

Durchläuft u eine Ellipse mit den Brennpunkten ± 1, und den Scheiteln $\pm a$, $\pm ib$, so durchläuft z einen Kreis, der um Null mit dem Radius $1:\sqrt{k}$ zu schlagen ist, wenn $q = (a-b)^2:(a+b)^2$ gesetzt wird.

§ 60. Verlauf der Functionen cau, dau für positiv reelle k und q kleiner als Eins. Die Summe der Argumente, für welche cau denselben Werth annimmt, ist in einem aus den Perioden $4K$, $2K+2iK'$ derselben gebildeten Elementarparallelogramm nach diesen Perioden congruent 0, weil die Function in den zwei Punkten iK' und $2K+iK'$ unendlich gross wird. Aus diesem Grunde kann cau, wenn u zwischen 0 und K liegt, keinen Werth zweimal annehmen, und muss deshalb von 1 bis 0 fortwährend abnehmen, wenn u von 0 bis K wächst. Zwischen K und $2K$ nimmt sie aus gleichem Grunde fortwährend ab, bis sie bei $2K$ den Werth -1 erreicht. Das Verhalten zwischen $-2K$ und 0 wird durch die Gleichung $ca-u = cau$ bestimmt, und das weitere Verhalten für reelle u durch die Periodicität. Stellt man die Curve $y = cax$ in rechtwinkligen Coordinaten dar, so ähnelt sie der Cosinuslinie $y = cos(\pi x:2K)$ sehr, mit der sie die höchsten und tiefsten Punkte, und die Schnittpunkte mit der Abscissenachse gemein hat, und mit der sie zugleich über und unter der Abscissenachse liegt. Während aber die Cosinuslinie mit der Sinuslinie wegen der Relation $cos(\pi x:2K) = sin(\pi(x+K):2K)$ durch eine Verschiebung zur Deckung gebracht werden kann, ist ein gleiches Verhalten der Linien $y = sax$, $y = cax$ nicht vorhanden, weil $sa(x+K)$ nicht gleich cax, sondern gleich $cax:dax$ ist. — Für imaginäre u zwischen 0 und iK' ist cau positiv reell, weil cau auf diesem Wege keinen Werth zweimal annehmen kann, und für $u = 0$ den Werth 1 hat, für $u = iK'$ aber unendlich gross wird und zwischen $u = 0$ und $u = iK'$ ihr Zeichen nicht wechselt, denn ihre Nullpunkte sind K und $3K$.

Die Summe der Argumente, für welche dau denselben Werth in einem aus ihren Elementarperioden $2K$, $4iK'$ gebildeten Parallelogramm annimmt, ist congruent Null. Deshalb kann dau für reelle u zwischen 0 und K keinen Werth zweimal annehmen und es liegen deshalb die Werthe von dau zwischen $1 = da0$ und $k' = daK$. Ebenso kann dau zwischen $u = K$ und $u = 2K$ keinen Werth zweimal annehmen, nimmt deshalb in diesem Intervalle von k' bis 1 zu. Zwischen $u = 0$ und $u = -2K$ ist ihr Verhalten durch die Gleichung $da-u = dau$, und für weitere reelle Werthe ist es durch die Periodicität bestimmt. Man erkennt so, dass dau für relle u stets positiv ist, wenn k^2 positiv und < 1 ist. Die Curve $y = dax$ in Cartesianischen Coordinaten ähnelt an Gestalt der Linie $y = cax$, sie ist eine Wellenlinie, deren höchste und tiefste Punkte zu denselben Abscissen wie bei jener gehören. Die Wellenberge und Wellenthäler sind aber viel flacher bei der Curve $y = dax$ als bei der $y = cax$, und halten sich immer zwischen der Linie $y = 1$ und $y = k'$. — Für rein imaginäre u zwischen 0 und iK' ist dau positiv reell und nimmt alle Werthe zwischen 1 und $+\infty$ einmal und nur einmal an.

Bilden wir das Rechteck mit den Ecken $0, K, K+iK', iK'$ durch die Gleichung $z = cau$ in die z-Ebene ab, so bildet sich die Seite $0..K$ auf die Linie $1..0$ der z-Ebene ab. Setzt man $u = K+iu''$, $0 \leqq u'' \leqq K'$, so ist $cau = caK+iu'' = -k'saiu'':daiu''$ negativ imaginär. Durchläuft u die Seite $K..K+iK'$, so durchläuft z die negativ imaginäre Achse von 0 bis $-ik':k$ ohne umzukehren. Durchläuft u die Linie von 0 bis iK', so durchläuft z die positiv reelle Achse von 1 bis ∞. Setzt man $u = iK'+u'$, $0 \leqq u' \leqq k$, so ist $saiK'+u' = -idau':ksau'$, es ist daher cau auf der Strecke $iK'..iK'+K$ negativ imaginär, und nimmt von ∞ bis $-ik':k$ ab. *Es bildet sich das Rechteck Q_1 durch die Gleichung $z = cau$ auf die Viertelebene ab, die von der positiv reellen und der negativ imaginären Achse begrenzt ist.*

Bilden wir dasselbe Rechteck durch die Gleichung $z = dau$ in der z-Ebene ab, so durchläuft z die positiv reelle Achse von 1 bis k', wenn u über die Seite von 0 bis K geführt wird. Bewegt sich u über die Seite $0..iK'$, so durchläuft $z = dau$ die positiv reelle Achse von 1 bis ∞. Aus der Gleichung $daK+iu'' = k':daiu''$ ergiebt sich, dass die Seite $K..K+iK'$ der reellen Achse der z-Ebene von k' bis 0 entspricht, und aus der Gleichung $daiK'+u' = -isau':cau'$ folgt, dass die Seite

$iK' \ldots iK'+K$ der negativ imaginären Achse von ∞ bis 0 entspricht. *Dem Rechteck 0, K, $K+iK'$, iK' entspricht daher die Viertelebene, welche von der positiv reellen und negativ imaginären Achse begrenzt ist.*

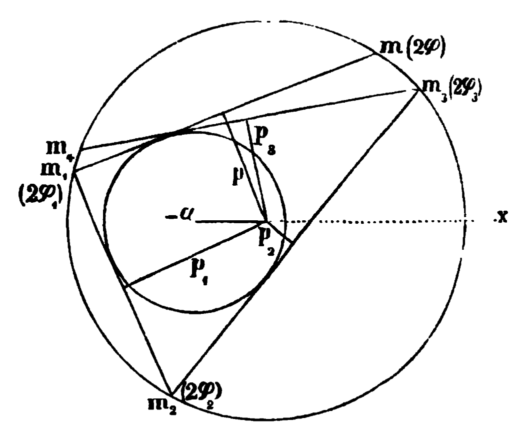
Jeder Punkt der u-Ebene lässt sich wegen der Periodicität und durch die Gleichungen VI bis XVI des § 55 in eindeutige Beziehung zu einem Punkte des eben betrachteten Rechtecks setzen. Aus diesem Grunde genügt es, bei Vorzeichenbestimmungen die Werthgebiete zu kennen, in denen cau, dau sich bewegen, wenn es in dem Rechteck Q_1 liegt.

§ 61. Ein Schliessungsproblem. Wir können an dieser Stelle als Anwendung der elliptischen Function die Lösung eines Problems einschalten, welches früher von Poncelet und Steiner behandelt worden ist, und dessen Zusammenhang mit dem Additionstheorem der elliptischen Functionen Jacobi bemerkt hat. (Jacobi, gesammelte Werke B. I, pag. 279).

Die Gleichung $ca\,t = ca\,u\,ca\,v + sa\,u\,sa\,v\,da\,t$ hat vier wesentlich verschiedene Wurzeln, wenn v als unbekannt gedacht wird. Ihre rechte Seite $f(v)$ ist in v eine doppelt periodische Function mit den Perioden $4K$ und $4iK'$, sie wird für die vier Werthe iK', $2K+iK'$, $3iK'$, $3iK'+2K$, deren Summe congruent Null ist, unendlich gross, und wird also auch viermal gleich $ca\,t$. Die Gleichung VII) des § 56 lehrt, dass sie für $v=u+t$ und $v=u-t$ befriedigt wird. Die beiden andern Wurzeln aber sind $v = 2K+2iK'-(u\pm t)$, wie man daraus erkennt, dass $ca\,v$ die Periode $2K+2iK'$ hat, und dass

$$sa(2K+2iK'-(u\pm t)) = sa(2K-(u\pm t)) = sa(u\pm t)$$

ist. Sind nun u und t reelle Grössen, so giebt es nur zwei reelle Wurzeln dieser Gleichung, nämlich $v = u+t$ und $v=u-t$. Diese letzteren kommen bei dem jetzt zu behandelnden Problem allein in Betracht.



Die Centrale zweier excentrischer Kreise, von denen der eine im Innern des andern liegt, habe die Länge a. Der Mittelpunkt des grossen Kreises (R) sei Coordinatenanfang, der Mittelpunkt des kleineren Kreises (r) habe die Abscisse $-a$, die Ordinate 0. Auf dem Kreise (R) werde ein Punkt m angenommen, dessen Radiusvector mit der positiven Abscissenachse den Winkel 2φ einschliesst. Von diesem Punkte ziehen wir in der Richtung der wachsenden Winkel eine Tangente an den kleineren Kreis (r), der (R) im Punkte m_1 trifft. Der Winkel, den der Radiusvector R dieses Punktes mit der positiven Abscissenachse einschliesst, sei $2\varphi_1$. Von m_1 ziehen wir die Tangente $m_1 m_2$ an (r), der Radiusvector des Punktes m_2 auf (R) bildet mit der Abscissenachse den Winkel $2\varphi_2$. So ziehen wir weiter die Linien $m_2 m_3$, $m_3 m_4 \ldots$ mit den zugehörigen Winkeln $2\varphi_3$, $2\varphi_4 \ldots$, Tangenten und Secanten an (r) und (R). Das Loth vom Coordinatenanfang auf $m\,m_1$ sei p, auf $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, $m_3 m_4 \ldots$ seien die Lothe bez. p_1, p_2, $p_3 \ldots$; dann ist der Winkel, den p_μ mit der positiven Abscissenachse einschliesst, $\varphi_\mu + \varphi_{\mu+1}$, die Länge des Lothes aber ist $p_\mu = R\cos(\varphi_{\mu+1} - \varphi_\mu)$, wie man aus der Figur sogleich erkennt, weil Winkel $(p, R) = \varphi + \varphi_1 - 2\varphi = \varphi_1 - \varphi$ ist. Setzt man in die in der sogenannten Normalform gedachten Gleichung der Geraden $m_\mu \ldots m_{\mu+1}$ die Coordinaten des Mittelpunktes von (r) ein, so findet man weiter

$$\text{(A.)}\quad a\cos(\varphi_\mu+\varphi_{\mu+1}) + p_\mu = r = a\cos(\varphi_\mu+\varphi_{\mu+1}) + R\cos(\varphi_\mu - \varphi_{\mu+1})$$
$$= (R+a)\cos\varphi_\mu\cos\varphi_{\mu+1} + (R-a)\sin\varphi_\mu\sin\varphi_{\mu+1}.$$

Es beschränkt die Allgemeinheit nicht, wenn φ positiv angenommen wird. Nun werde gesetzt

$$\text{(B.)}\quad da\,t = \frac{R-a}{R+a},\quad \frac{r}{R+a} = ca\,t,\quad sa\,t = \frac{\sqrt{(R+a)^2-r^2}}{R+a},\quad k^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2-r^2},\quad k'^2 = \frac{(R-a)^2-r^2}{(R+a)^2-r^2},$$

worin k' und k reell und kleiner als 1 sind, so dass es ein zugehöriges q giebt. Wir wählen t positiv und kleiner als K, so ist t durch die Gleichungen (B.) vollständig bestimmt, weil die Function $da\,t$ in

einem Elementarparallelogramm jeden Werth nur für zwei Werthe von t annimmt, deren Summe congruent Null ist. Weiter setzen wir

$$\text{(C.)}\quad \sin\varphi_n = sa\,u_n,\quad \cos\varphi_n = ca\,u_n.$$

Durch diese beiden Gleichungen ist u_n, wenn nur reelle Werthe zugelassen werden, bis auf ein Multiplum von $4K$ bestimmt. Dividiren wir (A.) durch $R+a$ und setzen dann die eben gefundenen Ausdrücke in den elliptischen Functionen der Gleichungen (B.) und (C.) in den Quotienten ein, so erhalten wir

$$\text{(D.)}\quad \frac{r}{R+a} = \cos\varphi_\mu \cos\varphi_{\mu+1} + \frac{R-a}{R+a}\sin\varphi_\mu \sin\varphi_{\mu+1},\quad ca\,t = ca\,u_\mu\, ca\,u_{\mu+1} + sa\,u_\mu\, sa\,u_{\mu+1}\, da\,t,$$

und es ist $u_{\mu+1} = u_\mu + t$. Die Lösung $u_{\mu+1} = u_\mu - t$ (die zum Punkte $m_{\mu-1}$ führen würde, kommt nicht in Betracht, wenn wir festsetzen, dass wachsenden φ auch wachsende u entsprechen sollen. Der Natur der Tangentenconstruction nach ist $\varphi_{\mu+1} - \varphi_\mu$ stets kleiner als π, dem entsprechend können wir $u_{\mu+1}$ so bestimmen, dass $u_{\mu+1} - u_\mu < 2K$ wird. Ist nämlich $\varphi = \varphi' + \nu\pi$, $u = u' + 2\nu K$, $\sin\varphi = sa\,u$ wo φ' zwischen 0 und π liegt, und wächst φ stetig um eine Grösse $\leqq \pi$, so wächst auch u **stetig** um eine Grösse $\leqq 2K$, weil wieder $\sin(\varphi+\pi) = sa(u+2K)$ ist. Liegt nun φ_μ zwischen $\nu\pi$ und $(\nu+1)\pi$, und u_μ zwischen $2\nu K$ und $2(\nu+1)K$, so liegt $\varphi_{\mu+1}$ entweder in demselben Intervalle $\nu\pi \ldots (\nu+1)\pi$ und zugleich $u_{\mu+1}$ in dem Intervalle von $2\nu K$ bis $2(\nu+1)K$, oder es liegt $\varphi_{\mu+1}$ in dem Intervalle von $(\nu+1)\pi$ bis $(\nu+2)\pi$, und zugleich $u_{\mu+1}$ in dem Intervalle $2(\nu+1)K \ldots 2(\nu+2)K$, weil in diesen Intervallen die Vorzeichen von $\sin\varphi_{\mu+1}$ und $sa\,u_{\mu+1}$ übereinstimmen. Sind demnach die Winkel $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ bez. kleiner als $\nu\pi, \nu_1\pi, \nu_2\pi, \nu_3\pi \ldots$ und grösser als $(\nu-1)\pi, (\nu_1-1)\pi, \ldots$, wo die $\nu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ ganze positive nicht abnehmende Zahlen sind, so sind auch $u, u_1, u_2, u_3, \ldots$ Grössen, die bez. kleiner als $2\nu K, 2\nu_1 K, 2\nu_2 K, \ldots$ und grösser als $2(\nu-1)K, 2(\nu_1-1)K, 2(\nu_2-1)K, \ldots$ sind, und wenn der Punkt m_n auf m fällt, wenn die Tangentenfolge ein den kleinen Kreis h-mal umgebendes geschlossenes Vieleck bildet, so muss $\varphi_n = h\pi + \varphi$, $u_n = 2hK + u$ sein. Nun ist $u_1 = u + t$, $u_2 = u_1 + t = u + 2t, \ldots, u_n = u + nt$, und die Bedingung für das Geschlossensein ist deshalb

$$\varphi_n - \varphi = h\pi,\ u_n - u = 2hK,\ sa\,nt = 0,\ t = \frac{2hK}{n},\ sa\,t = sa\frac{2hK}{n}.$$

Hieraus geht zunächst hervor, dass das Geschlossensein oder das Nichtgeschlossensein von der Wahl des Punktes m unabhängig ist. (Poncelet.)

§ 62. **Beispiele.** Drückt man $sa\,nt$ mittels des Additionstheoremes durch $sa\,t$ aus und ersetzt letztere Grösse mittels (B) durch R, r und a, so erhält man für ein gegebenes n die Bedingung des Schliessens. Da $t < K$ sein soll, so kommen von den verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung, die $t = 2K:n$, $4K:n$, $2(n-1)K:n$ entsprechen, wenn n ungerade ist, nur $\frac{1}{2}(n-1)$, für gerade n nur $\frac{1}{2}(n-2)$ in Betracht, welche den verschiedenen Anzahlen der Umgänge des Vielecks um (r) entsprechen. Für $n = 3$ wäre die Formel XII) des § 56 zu benutzen. Man kann zu einer Gleichung für $sa(2K:3)$ aber auch auf folgende Weise gelangen, die bequemer ist. Es ist (nach dem Additionstheorem)

$$sa\frac{4K}{3} = sa\left(2K - \frac{4K}{3}\right) = sa\frac{2K}{3} = \frac{2sa\frac{2K}{3}ca\frac{2K}{3}da\frac{2K}{3}}{1-k^2sa^4\frac{2K}{3}},\quad 2ca\frac{2K}{3}da\frac{2K}{3} = 1 - k^2sa^2\frac{2K}{3}$$

$$\frac{2r}{R+a}\cdot\frac{R-a}{R+a} = 1 - \frac{((R+a)^2-r^2)^2}{(R+a)^4}\,\frac{4aR}{(R+a)^2-r^2}$$

$$= \frac{(R+a)^4 - 4aR(R+a)^2 + 4ar^2R}{(R+a)^4} = \frac{((R^2-a^2)^2 + 4ar^2R)}{(R+a)^4}$$

$$2r(R+a)(R^2-a^2) = (R+a)^2((R+a)^2 - 4aR) + 4ar^2R = (R+a)^2(R-a)^2 + 4ar^2R = (R^2-a^2)^2 + 4ar^2R$$

$$(R^2-a^2)^2 - 2r(R+a)(R^2-a^2) + r^2(R+a)^2 = r^2(R+a)^2 - 4ar^2R = r^2(R-a)^2.$$

$$R^2 - a^2 - r(R+a) = \pm r(R-a).$$

Nimmt man das Minus-Zeichen, so folgt $R^2 - a^2 = 2ra$ oder $R^2 = a(a+r)$, was geometrisch nicht erfüllbar ist. Nimmt man das Plus-Zeichen, so erhält man die Bedingung

$$R^2 - a^2 = 2rR.$$

Für $h=1$, $n=6$ hat man

$$sa\frac{2K}{3}=-sa\left(\frac{K}{3}-K\right)=ca\frac{K}{3}:da\frac{K}{3},$$

$$2\,sa\frac{K}{3}da^2\frac{K}{3}=1-k^2sa^4\frac{K}{3}=((R^2-a^2)^2+4ar^2R):(R+a)^4$$

$$2(R^2-a^2)(R-a)\sqrt{(R+a)^2-r^2}=2(R^2-a^2)\sqrt{(R^2-a^2)^2-r^2(R-a)^2}=(R^2-a^2)^2+4ar^2R.$$

Hieraus folgt durch Quadratur (Fuss)

$$-3(R^2-a^2)^3+4(R^2-a^2)r^2(R^2+a^2)+16a^2r^4R^2=0.$$

Wollte man $h=2$ setzen, so würde das Sechsseit in zwei übereinander liegende Dreiecke zerfallen.

Das Resultat $u_1=u+t$ lässt sich auch noch anders deuten. Ist k und ist $sa\,t=\sin\psi$ gegeben, so bedeutet das zwei Beziehungen zwischen R, r und a, und es kann u noch beliebig gegeben werden $sa\,u=\sin\varphi$. Da nun φ_1 sich aus φ und ψ durch geometrische Construction ergiebt, so ist $sa\,u+t$ geometrisch construirt, und man kann von geometrischer Construction des Additionstheorems reden.

§ 63. **Verlauf der elliptischen Functionen für ein negatives q.** Ist $iK'=iK''+K$, so ist

$$q=e^{i\pi\frac{iK''+K}{K}}=e^{\frac{-\pi K''}{K}+i\pi}=-e^{\frac{-\pi K''}{K}},\quad \sqrt[4]{q}=e^{i\pi\frac{iK''+K}{4K}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{\frac{-\pi K'}{K}}.$$

Um das Gedächtniss dafür, dass q hier negativ ist, zu unterstützen, mag $q=-(q)$ gesetzt werden. Aus den Gleichungen

$$k'=\mathfrak{P}(1+(q)^{2n+1})^4:\mathfrak{P}(1-(q)^{2n+1})^4,\quad k=4i\sqrt{(q)}\,\mathfrak{P}(1+(q)^{4n+4})^4:\mathfrak{P}(1-(q)^{4n+1})^4$$

folgt, dass k' reell und grösser als Eins, und dass k rein imaginär ist. Für $(q)=0$ ist $k'=1$, $k=0$; nähert sich (q) der Eins, so wird k' positiv unendlich, k wird positiv imaginär unendlich, und k^2 wird negativ reell unendlich. Durchläuft (q) alle Zahlen von 0 bis 1, so durchläuft k^2 alle negativ reellen Werthe von 0 bis $-\infty$, und zwar ohne umzukehren, wie der Anblick der Productdarstellung lehrt, woraus folgt, dass für jedes negativ reelle k^2 oder rein positiv imaginäre k ein und nur ein negativ reelles $q=-(q)$ existirt. Für negativ imaginäre k ist k^2 ebenfalls negativ reell, und es ergiebt sich für $\pm ik$ dasselbe q, nur muss $\sqrt[4]{q}=(1-i)\sqrt[4]{(q)}:\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{q}=-i\sqrt{(q)}$ gesetzt werden. Dieser Fall führt nicht auf wesentlich Neues, wir wollen deshalb hier k als positiv imaginär voraussetzen.

Die Functionen $\Theta(u)$, $\Theta_{01}(u)$ sind für reelle u reell, $\Theta_{10}(u)$ und $\Theta_{11}(u)$ sind Producte aus reellen Grössen in den Factor $1+i$. $\Theta(u)$ und $\Theta_{01}(u)$ sind auch für rein imaginäre u reelle Grössen, $\Theta_{10}(u)$ aber ist ein Product einer reellen Grösse in den Factor $1+i$, und $\Theta_{11}(u)$ ein ebensolches in den Factor $i(1+i)=i-1$. Damit lässt sich der Verlauf von $sa\,u$, $ca\,u$, $da\,u$ für rein reelle und rein imaginäre u studiren.

Die Function $sa\,u=\Theta\Theta_{11}(u):\Theta_{10}\Theta_{01}(u)$ hat für reelle u nur reelle Werthe, der im Zähler und Nenner vorhandene Factor $(1+i)$ hebt sich fort. Die Curve $y=sa\,x$ gleicht im Falle eines negativen q insofern der im § 57 für ein positives q beschriebenen, als sie ebenfalls eine Wellenlinie darstellt, deren grösste und kleinste Ordinaten ± 1 sind, und diese Werthe sowohl, als auch die Werthe 0 für dieselben Werthe von x annimmt als jene, sofern K dasselbe ist. Auch theilt sie mit jener Curve die Eigenschaft, dass sie von $x=0$ bis $x=K$ fortwährend ansteigt, von $x=K$ bis $x=2K$ fortwährend von 1 bis 0 abnimmt, und es nimmt in dem Intervalle von 0 bis K $sa\,u$ keinen Werth zweimal an, aus gleichen Gründen als im § 57. Für rein imaginäre positive u zwischen 0 und iK'' ist $sa\,u$ ebenfalls positiv imaginär und wächst fortwährend. Es ist aber

$$sa\,iK''=sa(iK'-K)=-ca\,iK':da\,iK'=-1:k,$$

was eine positiv imaginäre Grösse ist. Zwischen 0 und $-iK''$ ist $sa\,u$ negativ imaginär und nimmt jeden Werth zwischen 0 und $1:k$ einmal und nur einmal an. Rein imaginäre Werthe ausserhalb dieses Intervalles schliessen wir vorläufig von der Betrachtung aus.

Die Function $ca\,u=\Theta_{01}\Theta_{10}(u):\Theta_{10}\Theta_{01}(u)$ ist für reelle u reell und nimmt von 1 bis 0 unaufhörlich ab, wenn u von 0 bis K wächst. Wächst u von K bis $2K$, so nimmt $ca\,u$ weiter ab bis zu -1.

Für negative u ergiebt sich der Verlauf von $ca u$ aus der Gleichung $ca - u = ca u$, und ausserhalb des Intervalles von $-2K$ bis zu $2K$ aus der Periodicität. Die Curve $y = ca x$ für ein negatives q ähnelt der, welche wir im § 60 für ein positives q beschrieben haben, mit der sie, wenn K beidemal dasselbe ist, in ihren höchsten, tiefsten und den Nullpunkten übereinstimmt. Für imaginäre u zwischen $-iK''$ und $+iK''$ ist $ca u$ positiv reell, der Factor $(1+i)$ hebt sich im Zähler und Nenner fort. Da

$$ca\, iK'' = ca(iK' - K) = k' sa\, iK' : da\, iK' = ik' : k$$

ist, welche Grösse positiv reell und grösser als Eins ist, so durchläuft $ca u$ die Werthe von 1 bis $ik' : k$, wenn u von 0 bis iK'' wächst, und dieselben Werthe noch einmal, wenn u von 0 bis $-iK''$ abnimmt.

Die Function $da u = \Theta_{01}\Theta(u) : \Theta\Theta_{01}(u)$ ist reell für reelle u, sie hat für $u = 0$ den Werth 1 und wächst bis zu k', wenn u von 0 bis K zunimmt. Wächst u weiter bis $2K$, so nimmt $da u$ wieder fortwährend bis zu dem Werthe 1 ab, und für weitere reelle Werthe von u bestimmt sich $da u$ dadurch, dass $da u$ die Periode $2K$ hat. Die Curve $y = da x$ unterscheidet sich von der im § 60 für ein positives q und dieselbe Function beschriebenen dadurch, dass sie gewissermassen einen entgegengesetzten Verlauf hat, indem ihre Ordinaten da zunehmen, wo die jener Curve abnehmen und umgekehrt.

Für rein imaginäre u ist $da u$ reell. Da $da\, iK'' = da(iK' - K) = k' : da\, iK' = 0$ ist, so nimmt $da u$ von 1 bis 0 ab, wenn u von 0 bis iK'' wächst. Wächst u bis zu $2iK''$, so wird zuletzt

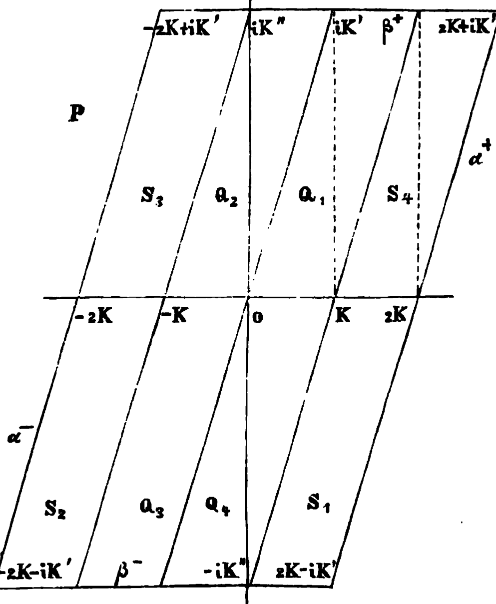
$$da\, 2iK'' = da(2iK'' - 2K) = da\, 2iK' = -da\, 0 = -1,$$

die Function nimmt daher bis -1 ab. Für negativ imaginäre u zwischen 0 und $-2iK''$ ergeben sich die Werthe aus der Gleichung $da - u = da u$, und weiter aus der Periodicität.

Die Methode, diese Sätze streng zu erweisen, ist dieselbe als die im § 57 angewandte, weshalb sie nicht wiederholt zu werden braucht.

§ 64. **Die Riemann'sche Fläche für einen negativen Werth von k^2.** Bilden wir das Rechteck 0, K, $K + iK'' = iK'$, iK'' durch die Gleichung $z = sa u$ auf die z-Ebene ab, so wissen wir schon, dass der Rand $0 \ldots K$ sich auf die Strecke $0 \ldots 1$, der Rand $0 \ldots iK''$ sich auf die Strecke $0 \ldots -1 : k$ abbildet. Um das Bild des übrigen Rechteckrandes zu finden, setzen wir zuerst $u = K + iu''$ und lassen u'' von 0 bis K'' wachsen. Dann ist $sa K + iu'' = ca iu'' : da iu''$ positiv reell. Für $u'' = K''$ wird der Ausdruck unendlich gross. Es durchläuft demnach z die reelle Achse von 1 bis ∞, und zwar immer in derselben Richtung, wenn u von K bis iK' geradlinig läuft. — Durchschreitet u den Rand von iK'' bis iK', so setzen wir $u = iK'' + u'$ und lassen u' von 0 bis K wachsen. So ist

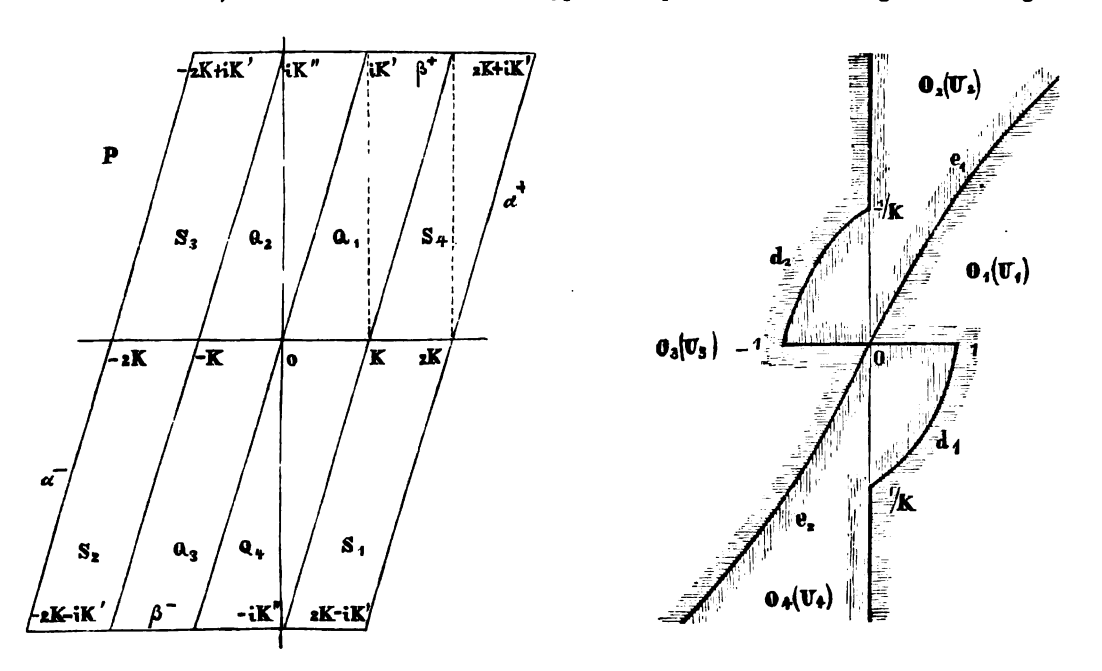
$$z = sa(u' + iK'') = sa(iK' + u' - K) = -sa(iK' + u' + K)$$
$$= -da u' : k\, ca u'$$



also positiv imaginär, es durchwandert z die Werthe der positiv imaginären Achse von $-1 : k$ bis ins Unendliche, wenn u' von 0 bis K zunimmt. So ergiebt sich, dass der Rand des zu untersuchenden Rechtecks der u-Ebene sich auf die positiv reelle und positiv imaginäre Achse der z-Ebene ein-eindeutig abbildet, welche die Begrenzung einer Viertelebene bilden. Mittels des Satzes im § 20 über den Zuwachs des Logarithmus einer Function, wenn die Variabele über einen geschlossenen Zug geführt wird, beweist man leicht (vergl. § 58), dass das Innere des Rechtecks sich ein-eindeutig auf die Viertelebene abbildet. — Ziehen wir von 0 nach $iK' = iK'' + K$ in der u-Ebene eine Diagonale, so muss ihr Bild eine knotenlose im Innern der Viertelebene von 0 ins Unendliche verlaufende Linie sein, deren Anfangsneigung gegen die reelle Achse $arc\, iK'$ ist und sich im Unendlichen asymptotisch derselben Richtung nähert. Sie ist in der

Figur durch e_1 dargestellt. — Das Bild des Rechtecks K, $2K$, $2K+iK''$, iK' untersucht man leicht mittels der Gleichung $saK+u=saK-u$. Es folgt daraus, dass sich der Rand von K bis $2K$, von $2K$ bis $2K+iK''$, von $2K+iK''$ bis iK', von $iK'=iK''+K$ bis K bez. auf die geraden Strecken der z-Ebene von 1 bis 0, von 0 bis $1:k$, von $1:k$ längs der negativ imaginären Achse bis ∞, von ∞ längs der positiv reellen Achse bis 1 abbildet. Das Innere des Rechtecks und das Innere der von der negativ imaginären und positiv reellen Achse eingeschlossenen Viertelebene entsprechen sich ein-eindeutig. Der Diagonale von K bis $2K+iK''$ des Rechtecks entspricht eine knotenlose Linie von 1 bis $1:k$, die in der Zeichnung durch d_1 gekennzeichnet ist.

Nun aber untersuchen wir das Bild des Parallelogrammes Q_1 mit den Ecken 0, K, $K+iK'$, iK'. Der Rand desselben bildet sich ab auf die Gerade von 0 bis 1, dann auf die Linie d_1, weiter auf die negativ imaginäre Achse von $1:k$ bis ins Unendliche, und endlich vom Punkte ∞ bis zum Punkte 0 auf die Linie e_1. Diese Linien bilden die Begrenzung eines unendlichen in der Zeichnung mit O_1 bezeichneten Ebenenstückes, und es besteht zwischen Q_1 und O_1 eine ein-eindeutige Beziehung.



Das Parallelogramm mit den Ecken 0, $-K$, $-K+iK'=iK''$, iK' bildet sich, wie man leicht sieht, auf das unendliche Ebenenstück O_2 ab, welches begrenzt ist von der geraden Strecke von 0 bis -1, von der Linie d_2, die zu d_1 symmetrisch den Punkt -1 mit dem Punkte $-1:k$ verbindet, von der positiv imaginären Achse von $-1:k$ bis ins Unendliche, und von der Linie e_1 vom Punkte ∞ bis zum Punkte 0. Zwischen Q_2 und O_2 besteht eine ein-eindeutige Beziehung.

Das Bild des Rechtecks Q_3 findet man aus dem von Q_1, und das von Q_4 aus dem von Q_2 durch die Gleichung $sa-u=-sau$, woraus man sogleich erkennt, dass sich Q_3 auf O_3, Q_4 auf O_4 ein-eindeutig abbildet.

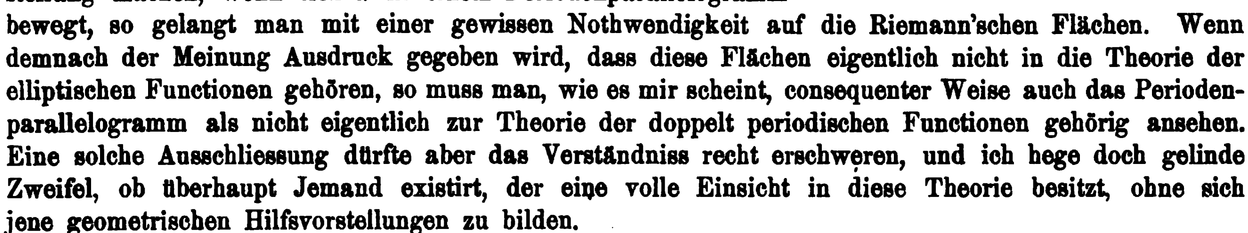
Um das Bild des ganzen Periodenparallelogrammes P mit den Ecken $-2K-iK'$, $2K-iK'$, $2K+iK'$, $-2K+iK'$ und den sie verbindenden Seiten β^-, α^+, β^+, α^- herzustellen, haben wir noch die Bilder der Parallelogramme S_1, S_2, S_3, S_4 zu beschreiben. Diese Bilder haben in der schon mit dem Bilde von $Q_1+Q_2+Q_3+Q_4$ bedeckten z-Ebene (O) nicht mehr Platz, wir verwenden für sie eine zweite Ebene, die Ebene (U). Mittels der Gleichungen $sau\pm 2K=-sau$ gelangt man zu dem Resultate, dass sich S_1 auf ein O_1 congruentes Stück U_1 abbildet, welches wir, um nicht noch eine zweite Zeichnung anfügen zu müssen, dadurch in der Figur kennzeichnen, dass wir neben O_1 noch den Buchstaben U_1 in

Klammern schreiben. Ebenso bilden sich S_2, S_3, S_4 bez. auf unendliche Ebenenstücke U_2, U_3, U_4 ab, die durch (U_2), (U_3), (U_4) in der Figur markirt und den Stücken O_2, O_3, O_4 congruent sind.

Jetzt legen wir die Ebenen O und U auf einander, U als die untere ansehend, so dass sich die Achsenkreuze decken, und lassen sie längs der Linien*) d_1, d_2 so mit einander verwachsen, dass diese Linien Durchsetzungslinien einer Riemann'schen Fläche T werden. Geht man über eine dieser Linien hinweg, so gelangt man aus einem Blatte in das andere, die Blätter durchsetzen sich längs dieser Linien, deren Endpunkte Verzweigungspunkte sind. Umkreist man einen dieser Punkte, so geht man über eine Durchsetzungslinie hinweg und kommt aus einem Blatte in das andere.

Die beiden Ränder α^+ und α^- des Parallelogrammes P bilden sich auf das positive bez. negative Ufer a^+ und a^- einer Linie a ab, welche im untern Blatte der Riemann'schen Fläche verläuft und der Lage nach mit der früheren Linie e_1+e_2 zusammenfällt. Der Linie β^+ von $+2K+iK'$ bis $-2K+iK'$ entspricht eine Linie b, die auf dem positiven Ufer von a im Unendlichen (also im unteren Blatte) beginnt, auf der negativ imaginären Achse bis zum Punkte $1:k$ läuft und durch Vermittelung dieses Verzweigungspunktes, den man auf unendlich kleinem Wege umkreist denken kann, ins obere Blatt gelangt, von da längs der negativ imaginären Achse durch's Unendliche über die positiv imaginäre Achse zum Punkte $-1:k$ kommt, durch Umgang um ihn ins untere Blatt eintritt, und dort längs der positiv imaginären Achse ins Unendliche verläuft, und so in einem Punkte endigt, der dem Ausgangspunkte auf dem negativen Ufer von a gegenüberliegt. Das linke Ufer der Zugrichtung ist das positive b^+, das andere das negative, es entspricht der Linie β^-. Dass die Riemann'sche Fläche T dreifach zusammenhängend ist, und dass sie durch die Querschnitte a und b, deren beide Ufer zusammen eine continuirliche Begrenzung bilden, in eine einfach zusammenhängende T' zerschnitten wird, folgt genau so, wie es im Falle eines positiven k^2 im § 58 nachgewiesen ist.

Will man sich von dem Werthgebiete $z = sau$ eine Vorstellung machen, wenn sich u in einem Periodenparallelogramm bewegt, so gelangt man mit einer gewissen Nothwendigkeit auf die Riemann'schen Flächen. Wenn demnach der Meinung Ausdruck gegeben wird, dass diese Flächen eigentlich nicht in die Theorie der elliptischen Functionen gehören, so muss man, wie es mir scheint, consequenter Weise auch das Periodenparallelogramm als nicht eigentlich zur Theorie der doppelt periodischen Functionen gehörig ansehen. Eine solche Ausschliessung dürfte aber das Verständniss recht erschweren, und ich hege doch gelinde Zweifel, ob überhaupt Jemand existirt, der eine volle Einsicht in diese Theorie besitzt, ohne sich jene geometrischen Hilfsvorstellungen zu bilden.



§ 65. Der specielle Fall $K'' = K$. Abbildung des Quadrates auf den Kreis. Ist $iK' = K+iK$, $q = -e^{-\pi}$, so hat sau die Perioden $4K$ und $2iK' = 2K+2iK$, oder auch die primitiven Perioden $2iK+2K$ und $2iK-2K$ (woraus folgt, dass auch $4iK$ eine Periode ist). Dieselben Perioden hat aber als Function von u auch $saiu$. Beide Functionen nun, sau und $saiu$ verschwinden für $u=0$

*) In einer Rede des Herrn Krause (Civilingenieur, XXXIV. Heft, 7) befindet sich die befremdliche Aeusserung, dass beim Zusammenheften der Blätter einer Riemann'schen Fläche eine geometrische Unmöglichkeit stattfinde. Sollte hier eine Verwechselung zwischen materiellen und geometrischen Gebilden vorliegen? Dass sich verschiedene Aeste einer geometrischen Fläche durchsetzen, gehört zu den elementaren Vorstellungen der Raumgeometrie. Man denke z. B. an einen Cylinder, dessen Grundschnitt das Blatt des Cartesius ist.

und $u = 2K$, weil $sa2iK = -sa2iK + 2K = -sa0$ ist. Beide Functionen werden in den Punkten $iK+K$ und $iK-K$ unendlich gross. Die beiden Functionen können sich daher nach § 39 nur durch einen constanten Factor unterscheiden, welcher sich nach Division mit u für $u = 0$ unmittelbar ergiebt, so dass man die Beziehung findet $saiu = isau$,
aus welcher Gleichung man noch die Eigenschaft $sa(u+2iK) = -sau$ abliest. Setzt man $iK'+K = 2K+iK$ für u, so folgt (§ 55)

$$isa(K+iK') = i:k = sai(K+iK') = sa(2iK-K) = -sa-K = saK = 1, \quad k = i.$$

Daraus findet man leicht die Gleichungen

$$caiu = \sqrt{1-sa^2iu} = \sqrt{1-i^2sa^2u} = dau, \quad daiu = cau, \quad sa'u = \sqrt{1-sa^4u}.$$

Die Linien e_1, e_2, a des vorigen Paragraphen werden gerade, und sind unter dem Winkel $\frac{1}{4}\pi$ gegen die reelle Achse geneigt, denn durchläuft u die Gerade von 0 bis iK', so ist auf ihr $u = \lambda + i\lambda$, $0 \leqq \lambda \leqq K$, und also nach dem Additionstheorem

$$sau = sa\lambda + i\lambda = (sa\lambda\, cai\lambda\, dai\lambda + sai\lambda\, ca\lambda\, da\lambda):(1-i^2sa^2\lambda\, sa^2i\lambda) = (1+i)sa\lambda\, ca\lambda\, da\lambda:(1-sa^4\lambda)$$

und der arcus dieser Grösse ist von λ unabhängig gleich $\frac{1}{4}\pi$.

Durchläuft u den Rand eines Quadrates mit den Ecken K, iK, $-K$, $-iK$, so durchläuft $z = sau$ den Umfang eines Kreises mit dem Radius 1, und es bildet sich das Innere des Quadrates winkeltreu auf das Innere des Einheitskreises so ab, dass sich die Mittelpunkte der Figuren entsprechen (Schwarz).

Es genügt, eine Seite des Quadrates zu betrachten, etwa die Seite von K bis iK. Auf ihr ist $u = K + (i-1)\lambda$, während λ reell von 0 bis K wächst. Setzt man nun

$$sau = z = sa(K+(i-1)\lambda) = \frac{ca\lambda - i\lambda}{da\lambda - i\lambda} = \frac{ca\lambda\, cai\lambda + sa\lambda\, sai\lambda\, da\lambda\, dai\lambda}{da\lambda\, dai\lambda + i^2 sa\lambda\, sai\lambda\, ca\lambda\, cai\lambda}$$

$$= \frac{ca\lambda\, da\lambda + isa\lambda\, sa\lambda\, da\lambda\, ca\lambda}{da\lambda\, ca\lambda - isa\lambda\, sa\lambda\, da\lambda\, ca\lambda} = \frac{1+isa^2\lambda}{1-isa^2\lambda},$$

so ist klar, dass $abs\,z$ für diese Werthe von λ immer Eins ist, und dass z für $\lambda = 0$, $u = K$ Eins, für $u = iK$, $\lambda = K$, $z = (1+i):(1-i) = i$ ist, und dass z die Peripherie des Einheitskreises von 1 bis i durchläuft, während u über die Gerade $K \ldots iK$ geführt wird. Es bedarf nun keiner Erörterung weiter, dass der Seite $iK \ldots -K$ das Peripheriestück $i \ldots -1$, der Seite $-K \ldots -iK$ das Peripheriestück $-1 \ldots -i$, der Seite $-iK \ldots K$ das Stück $-i \ldots 1$ entspricht. Für $u = 0$ ist $z = 0$, also entspricht der Mittelpunkt dem Mittelpunkte, und den Diagonalen des Quadrates entsprechen auf einander senkrechte Radien des Kreises.

§ 66. Die lineare Transformation der Thetafunctionen. Die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen sa^2u, ca^2u, da^2u, die die Perioden $2\pi_1$, $2\pi_2$ besitzen, in unendliche Producte führt durch Zähler und Nenner zu den Quadraten von Thetafunctionen, deren Modul $\tau = i\pi\pi_2:\pi_1$ von dem Periodenverhältnisse abhängt. Es sind aber $2\pi_1$, $2\pi_2$ ein willkürliches Paar primitiver Perioden, mit der alleinigen Beschränkung, dass $arc(\pi_2:\pi_1)$ zwischen 0 und π liegen muss, und da dieses Paar durch jedes andere, welches dieselbe Bedingung erfüllt, ersetzt werden kann, so lassen sich jene doppelt periodischen Functionen durch unendlich viele verschiedene Thetafunctionen darstellen, und es lässt sich im Voraus erwarten, dass die so sich ergebenden Thetafunctionen in einer einfachen Beziehung zu einander stehen. Diese Beziehung ist aufzusuchen. — Es werde

$$\tau = i\pi\pi_2:\pi_1, \quad \bar\tau = i\pi\bar\pi_2:\bar\pi_1, \quad \bar\pi_2 = \alpha\pi_2 + \beta\pi_1, \quad \bar\pi_1 = \gamma\pi_2 + \delta\pi_1, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

gesetzt, wo α, β, γ, δ ganze positive oder negative Zahlen sind. Zwischen den Moduln der in Betracht kommenden Thetafunctionen bestehen demnach die Beziehungen

$$\text{I)} \quad \frac{\bar\tau}{i\pi} = \frac{\alpha\tau + \beta i\pi}{\gamma\tau + \delta i\pi} = \frac{1}{\gamma}\left(\alpha - \frac{i\pi}{\gamma\tau + \delta i\pi}\right), \quad \frac{\tau}{i\pi} = \frac{-\delta\bar\tau + \beta i\pi}{\gamma\bar\tau - \alpha i\pi} = \frac{1}{\gamma}\left(-\delta - \frac{i\pi}{\gamma\bar\tau - \alpha i\pi}\right).$$

Das Argument z war eine Abkürzung für $-ui\pi:2\pi_1$, es wird daher zweckmässig sein, für $-ui\pi:2\bar\pi_1$ die Abkürzung $\bar z$ einzuführen, und wenn die Deutlichkeit eine nähere Angabe des Moduls nicht fordert, wird man

$$\vartheta_{hg}(z) \text{ für } \vartheta_{hg}(z,\tau), \quad \bar\vartheta_{hg}(\bar z) \text{ für } \bar\vartheta_{hg}(\bar z,\bar\tau)$$

schreiben dürfen. Die lineare Transformation der Thetafunctionen beschäftigt sich mit der Aufgabe, die Beziehung zwischen $\vartheta_{hg}(z)$ und $\bar{\vartheta}_{h'g'}(\bar{z})$ zu finden. Dabei bestehen zwischen $\bar{z}$ und z die aus ihrer Definition folgenden Gleichungen

$$\text{II)}\quad \bar{z} = i\pi z : (\gamma\tau + \delta i\pi), \quad z = -i\pi\bar{z} : (\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi).$$

— Für die auszuführenden Rechnungen ist es nützlich, einige einfache aus den obigen folgende Beziehungen zwischen τ und $\bar{\tau}$ vorauf geben zu lassen. Man findet nämlich leicht

$$\text{III)}\quad \begin{aligned} &(\tau\gamma + \delta i\pi)(\bar{\tau}\gamma - \alpha i\pi) = -(i\pi)^2, \ (\tau\gamma + \delta i\pi)(\bar{\tau}\delta - \beta i\pi) = \tau i\pi, \\ &\gamma(\delta\bar{\tau} - \beta i\pi) = \delta(\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi) + \alpha\delta i\pi - \gamma\beta i\pi = \delta(\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi) + i\pi, \end{aligned}$$

$$\text{IV)}\quad \frac{\gamma(\delta\bar{\tau} - \beta i\pi)^2}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi} = \frac{(\delta(\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi) + i\pi)(\delta\bar{\tau} - \beta i\pi)}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi} = \delta^2\bar{\tau} - \delta\beta i\pi - \tau.$$

Aus diesen Gleichungen findet man nun wiederum leicht

$$\text{V)}\quad \gamma\frac{(\bar{z} - \lambda\gamma\bar{\tau} + \lambda\alpha i\pi)^2}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi} = \frac{\bar{z}^2\gamma}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi} - 2\lambda\gamma\bar{z} + \lambda^2\gamma\bar{\tau} - \lambda^2\alpha\gamma i\pi,$$

$$\text{VI)}\quad \frac{(\bar{z} + \mu\delta\bar{\tau} - \mu\beta i\pi)^2\gamma}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi} - \frac{\bar{z}^2\gamma}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi} = 2\mu\frac{\delta\bar{\tau} - \beta i\pi}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi}\gamma\bar{z} + \mu^2\gamma\frac{(\delta\bar{\tau} - \beta i\pi)^2}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi}$$

$$= 2\mu\frac{(\delta(\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi) + i\pi)}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi}\bar{z} + \mu^2(\delta^2\bar{\tau} + \tau - \delta\beta i\pi) = 2\mu\delta\bar{z} - 2\mu z + \mu^2\delta^2\bar{\tau} - \mu^2\tau - \mu^2\delta\beta i\pi,$$

was aus III), IV) und II) gefunden wird. —

Vermehrt man z um $\lambda i\pi$, so vermehrt sich $\bar{z}$ um $-\lambda\gamma\bar{\tau} + \lambda\alpha i\pi$, und da

$$\bar{\vartheta}_{h'g'}(\bar{z} - \lambda\gamma\bar{\tau} + \lambda\alpha i\pi) = (-1)^{\lambda(\alpha h' - \gamma g')} e^{2\lambda\gamma\bar{z} - \lambda^2\gamma^2\bar{\tau}}\bar{\vartheta}_{h'g'}(\bar{z})$$

ist, so muss man $\bar{\vartheta}_{h'g'}(\bar{z})$ mit

$$e^{\frac{\bar{z}^2\gamma}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi}} = e^{-\frac{z^2\gamma}{\gamma\tau + \delta i\pi}}$$

multipliciren, um eine Function $\varphi(z)$ zu erhalten, die der Functionalgleichung

$$\varphi(z + \lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}\varphi(z)$$

genügt, wo $h = \alpha h' - \gamma g' - \alpha\gamma$ ist. Die Function $\varphi(z)$ genügt aber dann auch der zweiten der unter I) im § 47 aufgestellten Functionalgleichungen. Denn wenn man z um $\mu\tau$ vermehrt, so ändert sich $\bar{z}$ um $i\pi\,\mu\tau : (\gamma\tau + \delta i\pi) = \mu\delta\bar{\tau} - \mu\beta i\pi$, und es ist

$$\bar{\vartheta}_{h'g'}(\bar{z} + \mu\delta\bar{\tau} - \mu\beta i\pi) = (-1)^{\mu(\beta h' + \delta g')} e^{-2\mu\delta\bar{z} - \mu^2\delta^2\bar{\tau}}\bar{\vartheta}_{h'g'}(\bar{z}),$$

$$e^{\frac{(\bar{z} + \mu\delta\bar{\tau} - \mu\beta i\pi)^2\gamma}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi}} = e^{\frac{\bar{z}^2\gamma}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi} + 2\mu\delta\bar{z} - 2\mu z + \mu^3\delta^2\bar{\tau} - \mu^2\tau - \mu^2\delta\beta i\pi},$$

$$\varphi(z + \mu\tau) = (-1)^{g\mu} e^{-2\mu z - \mu^2\tau}\varphi(z), \quad g = \beta h' + \delta g' - \delta\beta.$$

Hieraus folgt, dass sich $\varphi(z)$ von $\vartheta_{hg}(z)$ nur durch einen constanten (von z unabhängigen) Factor unterscheiden kann, und dass also

$$\text{VII)}\quad \vartheta_{hg}(z) = C e^{\frac{\bar{z}^2\gamma}{\gamma\bar{\tau} - \alpha i\pi}}\bar{\vartheta}_{h'g'}(\bar{z})$$

gesetzt werden darf, wo

$$\text{VIII)}\quad h = \alpha h' - \gamma g' - \alpha\gamma, \quad g = \beta h' - \delta g' - \beta\delta; \quad h' = h\delta - g\gamma + \gamma\delta, \quad g' = -h\beta + g\alpha + \alpha\beta$$

ist. Bei Berechnung von $h'g'$ ist von dem Umstande Gebrauch gemacht, dass $\alpha - \beta$ ungerade ist, wenn es γ und δ sind, und dass in diesen Grössen ein Multiplum von 2 ohne Weiteres fortgelassen werden darf.*)

---

*) Nach der Formelsammlung des Herrn Schwarz ist

$$\sqrt{\frac{2\pi_1}{\pi}}\sqrt[8]{G}\,\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\pi_1}}\vartheta_{11}\left(\frac{-ui\pi}{2\pi_1}, \frac{i\pi\pi_2}{\pi_1}\right), \quad G = (e_2 - e_1)^2(e_3 - e_1)^2(e_3 - e_2)^2,$$

$$\frac{2\pi_1}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi_1}{\pi}}\sqrt[8]{G} = \vartheta\vartheta_{01}\vartheta_{10} = -i\vartheta'_{11}, \quad 2\eta_1\pi_1 = \pi^2\vartheta'''_{11} : 6\vartheta'_{11}.$$

Werden die Perioden durch die Schreibweise $\sigma(u\,|\,\pi_1, \pi_2)$ angedeutet, so folgt hieraus

§ 67. Die Constante der linearen Transformation. So weit C von τ abhängt, lässt sich diese Grösse mittels der Differentialgleichung II) des § 47 bestimmen, welche zu dem Resultate führt

$$d\lg C = -\tfrac{1}{2}\, d\lg(\gamma\tau + \delta i\pi), \quad C = C'\sqrt{-\pi : (\gamma\tau + \delta i\pi)},$$

wo C' nun eine numerische Constante bedeutet. Eine andere Methode, die wir hier anwenden wollen*), bestimmt C' sogleich bis auf's Vorzeichen. — Zunächst erweitern wir die Formel $i\vartheta\vartheta_{01}\vartheta_{10} : \vartheta'_{11} = 1$ ein wenig. Es sei

$$h'_4, g'_4 \equiv 1, 1 \text{ (modulo 2)},$$

und es seien bez. die Indicespaare

$$h'_1, g'_1;\ h'_2, g'_2;\ h'_3, g'_3 \equiv h_1, g_1;\ h_2, g_2;\ h_3, g_3 \text{ (modulo 2)},$$

wobei die Paare h_1, g_1; h_2, g_2; h_3, g_3 die Charakteristiken 0,0; 0,1; 1,0, jedoch in nicht vorausbestimmter Reihenfolge sind. Dann ist nach Formel IV) des § 47, wenn $h'g'$ irgend eins der Paare $h'_1, g'_1 \ldots h'_4, g'_4$ ist,

$$\vartheta_{h',g'}(z) = (-1)^{\frac{1}{2}h'(g'-g)}\vartheta_{hg}(z), \quad \bar{\vartheta}_{h',g'}(\bar{z}) = e^{\frac{1}{2}i\pi h'(g'-g)}\bar{\vartheta}_{h,g}(\bar{z}),$$

$$\frac{i\bar{\vartheta}_{h'_1,g'_1}\bar{\vartheta}_{h'_2,g'_2}\bar{\vartheta}_{h'_3,g'_3}}{\bar{\vartheta}'_{h'_4,g'_4}} = \frac{i\bar{\vartheta}\,.\,\bar{\vartheta}_{01}\bar{\vartheta}_{10}}{\bar{\vartheta}'_{11}}\, e^{i\pi\psi},$$

$$\psi = (g'_1 - g_1)h'_1 + (g'_2 - g_2)h'_2 + (g'_3 - g_3)h'_3 - g'_4 + 1.$$

Die Constante C wird ausser von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auch noch von h, g abhängen. Deshalb ist es nöthig, die Ableitung des vorigen Paragraphen zunächst für den Fall $h = 0$, $g = 0$ auszuführen und daraus die Ableitung für die übrigen Charakteristiken mittels der Formel V) des § 47 zu bewerkstelligen. Setzt man nachher $z = 0$, so erhält man auf diese Weise die Formeln

$$\sigma(u \mid \pi_1, \pi_2) = \frac{2\pi_1 e^{\frac{\pi^2 u^2 \vartheta'''_{11}}{24\pi_1^2 \vartheta'_{11}}}\vartheta_{11}\left(\frac{-ui\pi}{2\pi_1}, \frac{i\pi\pi_2}{\pi_1}\right)}{\pi\vartheta\vartheta_{01}\vartheta_{10}} = \frac{e^{\frac{-u^2\Theta'''_{11}}{6\Theta'_{11}}}\Theta_{11}\left(u, \frac{i\pi\pi_2}{\pi_1}\right)}{\Theta'_{11}\left(0, \frac{i\pi\pi_2}{\pi_1}\right)}.$$

Nun ist nach den im Text gefundenen Transformationsformeln

$$\Theta_{11}\left(u, \frac{i\pi\pi_2}{\pi_1}\right) = \text{Const.}\ e^{\frac{-u^2\pi\gamma i}{\pi_1\bar{\pi}_1}}\,\Theta_{11}\left(u, \frac{i\pi\bar{\pi}_2}{\bar{\pi}_1}\right),$$

und es folgt durch Differentiation

$$\Theta'_{11}\left(u, \frac{i\pi\pi_2}{\pi_1}\right) = \text{Const.}\left\{e^{\frac{-u^2\pi\gamma i}{\pi_1\bar{\pi}_1}}\,\Theta'_{11}\left(u, \frac{i\pi\bar{\pi}_2}{\bar{\pi}_1}\right) - \frac{2ui\pi\gamma}{\pi_1\bar{\pi}_1}\Theta_{11}\left(u, \frac{i\pi\bar{\pi}_2}{\bar{\pi}_1}\right)\right\},$$

$$\Theta'''_{11}\left(0, \frac{i\pi\pi_2}{\pi_1}\right) = \text{Const.}\left\{\Theta'''_{11}\left(0, \frac{i\pi\bar{\pi}_2}{\bar{\pi}_1}\right) - \frac{6\pi i\gamma}{\pi_1\bar{\pi}_1}\Theta'_{11}\left(0, \frac{i\pi\bar{\pi}_2}{\bar{\pi}_1}\right)\right\},$$

$$\frac{\Theta'''_{11}\left(0, \frac{i\pi\pi_2}{\pi_1}\right)}{\Theta'_{11}\left(0, \frac{i\pi\pi_2}{\pi_1}\right)} = \frac{\Theta'''_{11}\left(0, \frac{i\pi\bar{\pi}_2}{\bar{\pi}_1}\right)}{\Theta'_{11}\left(0, \frac{i\pi\bar{\pi}_2}{\bar{\pi}_1}\right)} - \frac{6i\pi\gamma}{\pi_1\bar{\pi}_1},$$

und hieraus entspringt mit Anwendung der im Text gefundenen Transformationsformeln der Satz

$$\sigma(u \mid \pi_1, \pi_2) = \sigma(u \mid \bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2).$$

Es ist demnach die Function $\sigma(u)$ und also auch ihr zweiter negativer logarithmischer Differentialquotient, die Function $p(u)$, der linearen Transformation gegenüber eine Invariante. In dieser Eigenschaft sind die Vortheile zu suchen, welche diese Functionen des Herrn Weierstrass, hauptsächlich in der Theorie der Transformation, bieten. Die Functionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ sind keine Invarianten, aber sie gehen bei linearen Transformationen in einander wechselsweise über, so dass ihre symmetrischen Functionen Invarianten sind.

*) Diese Methode ist von mir in den „Göttinger Nachrichten" von 1883 auf Seite 194 gegeben worden. Der Grundgedanke soll sich schon in einer polnischen Abhandlung des Herrn Sochocki finden, beschränkt auf den Fall $\alpha = 0$, $\delta = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$. Durch diese Beschränkung wird aber ihr Werth erheblich vermindert, weil dann noch die Ermittelung einer achten Wurzel der Einheit übrig bleibt, während die obige Methode nur noch eine Quadratwurzel der Einheit unbestimmt lässt.

$$\vartheta = C\bar{\vartheta}_{h'_1, g'_1}, \quad \vartheta_{01} = \varepsilon_2 C\bar{\vartheta}_{h'_2, g'_2}, \quad \vartheta_{10} = \varepsilon_3 C\bar{\vartheta}_{h'_3, g'_3},$$
$$\vartheta'_{11} = \varepsilon_4 i\pi C\bar{\vartheta}'_{11} : (\gamma\tau + \delta i\pi),$$

worin

$$h'_1, g'_1 = \gamma\delta, \alpha\beta; \; h'_2, g'_2 = \gamma\delta - \gamma, \alpha\beta + \alpha; \; h'_3, g'_3 = \gamma\delta + \delta, \alpha\beta - \delta; \; h'_4, g'_4 = \gamma\delta + \delta - \gamma, \alpha\beta + \alpha - \beta,$$

und
$$\varepsilon_2 = e^{\frac{1}{4}i\pi(\alpha\gamma + 2\alpha\beta\gamma)}, \quad \varepsilon_3 = e^{\frac{1}{4}i\pi(\beta\delta - 2\alpha\beta\delta)}, \quad \varepsilon_4 = e^{\frac{1}{4}i\pi(\alpha\gamma + \beta\delta + 2\alpha\beta\gamma - 2\alpha\beta\delta - 2\beta\gamma)},$$
$$\varepsilon_2\varepsilon_3 : \varepsilon_4 = e^{\frac{1}{2}i\pi\beta\gamma} = -ie^{\frac{1}{2}i\pi\alpha\delta}$$

ist, und h'_1, g'_1; h'_2, g'_2; h'_3, g'_3 in nicht weiter zu bestimmender Reihenfolge den Paaren 0,0; 0,1; 1,0 congruent sind.

Aus diesen Formeln ergiebt sich

$$\frac{i\vartheta\vartheta_{01}\vartheta_{10}}{\vartheta'_{11}} = \frac{iC^2\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_4 i\pi} \frac{\bar{\vartheta}_{h'_1, g'_1}\bar{\vartheta}_{h'_2, g'_2}\bar{\vartheta}_{h'_3, g'_3} \cdot (\gamma\tau + \delta i\pi)}{\bar{\vartheta}'_{h'_4, g'_4}},$$
$$1 = -iC^2 e^{\frac{1}{2}i\pi(\alpha\delta + \psi)}(\gamma\tau + \delta i\pi) : i\pi,$$
$$C = \pm\sqrt{\frac{-\pi}{\gamma\tau + \delta i\pi}}\, e^{-\frac{1}{4}i\pi(\alpha\delta + \psi)}, \quad \psi = (g'_1 - g_1)h'_1 + (g'_2 - g_2)h'_2 + (g'_3 - g_3)h'_3 + 1 - g'_4,$$

worin die h_1, g_1; h_2, g_2; h_3, g_3; g_4 die kleinsten Reste der Zahlen h'_1, g'_1; h'_2, g'_2; h'_3, g'_3; g'_4 nach dem Modul 2 sind. Es ist also

$$\text{I)} \quad \vartheta(z, \tau) = \pm\sqrt{\frac{-\pi}{\gamma\tau + \delta i\pi}}\, e^{\frac{-z^2\gamma}{\gamma\tau + \delta i\pi} - \frac{1}{4}i\pi\psi}\, \vartheta\left(\frac{i\pi z}{\gamma\tau + \delta i\pi}, i\pi\frac{\alpha\tau + \beta i\pi}{\gamma\tau + \delta i\pi}\right),$$

und es ist C bis auf das Vorzeichen, welches zahlentheoretisch auszuwerthen ist, bestimmt.

Ist $\alpha = 0$, $\delta = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, so ist

$$\text{II)} \quad \vartheta_{hg}(z, \tau) = \sqrt{\frac{-\pi}{\tau}}\, e^{\frac{-z^2}{\tau} + \frac{1}{2}hgi\pi}\, \vartheta_{hg}\left(\frac{i\pi z}{\tau}, \frac{\pi^2}{\tau}\right).$$

Setzt man hierin $-\pi$ für τ, so werden die Moduln beiderseits gleich. Setzt man weiter

$$z = \tfrac{1}{2}h\pi - \tfrac{1}{2}gi\pi,$$

so werden beide Seiten der letzten Gleichung einander dann gleich, wenn das Wurzelzeichen positiv genommen wird. Da τ eine Grösse ist, deren reeller Theil stets negativ genommen werden muss, so dass $arc\,\tau$ im zweiten oder dritten Quadranten liegt, so ist

$$\sqrt{-\pi : \tau} = \sqrt{\pi : abs\,\tau} \,.\, (sin\,\tfrac{1}{2}\,arc\,\tau + i\,cos\,\tfrac{1}{2}\,arc\,\tau$$

eine Grösse, deren reeller Theil stets positiv ist, weil $\frac{1}{2}\,arc\,\tau$ immer im ersten oder zweiten Quadranten liegt. *Demnach ist in der Gleichung II) das Wurzelzeichen stets so zu wählen, dass der reelle Theil des Wurzelwerthes positiv ist.* Ist τ reell, so dient die Gleichung II) dazu, Thetafunctionen mit rein imaginärem Argument in solche mit reellem zu verwandeln.

Die Bestimmung des Vorzeichens erfordert zahlentheoretische Betrachtungen, die wir unterdrücken, obschon sie in den früheren Auflagen enthalten sind, in denen eine achte Wurzel der Einheit auf diesem Wege zu bestimmen blieb. In der Theorie der doppelt periodischen Functionen wird die lineare Transformation immer auf Thetaquotienten angewandt, für welchen Fall die Quadratwurzel sich völlig forthebt. Im speciellen Falle II) ist das Vorzeichen auch hier völlig bestimmt.

§ 68. Zusammensetzung von Transformationen. Kleinster Werth von q. Wendet man auf eine transformirte Thetafunction noch eine Transformation α', β', γ', δ' an, so erhält die neue Function den Modul

$$i\pi\frac{\alpha'\tau + \beta' i\pi}{\gamma'\tau + \delta' i\pi} = i\pi\frac{\tau(\alpha\alpha' + \gamma\beta') + i\pi(\beta\alpha' + \delta\beta')}{\tau(\alpha\gamma' + \gamma\delta') + i\pi(\beta\gamma' + \delta\delta')}$$

und das Argument

$$\frac{zi\pi}{\tau\gamma' + \delta' i\pi} = \frac{zi\pi}{\tau(\alpha\gamma' + \gamma\delta') + i\pi(\beta\gamma' + \delta\delta')},$$

und man kann daher diese successiven Transformationen durch die eine

$$\alpha'' = \alpha\alpha' + \gamma\beta', \quad \beta'' = \beta\alpha' + \delta\beta', \quad \gamma'' = \alpha\gamma' + \gamma\delta', \quad \delta'' = \beta\gamma' + \delta\delta'$$

ersetzen. —

Wir zeigen nun noch, dass die Transformation einer Thetafunction mit dem Modul τ in eine solche mit dem Modul $\bar{\tau} = i\pi \dfrac{\tau\alpha + \beta i\pi}{\tau\gamma + \delta i\pi}$ benutzt werden kann, um schwach convergente ϑ-Reihen in stärker convergente zu verwandeln. Diese Reihen convergiren nämlich um so rascher, je grösser der absolute Betrag des reellen Theiles des Moduls ist. Ist nun $\tau = -p\pi + p'\pi i$, so kann vorausgesetzt werden, dass p' in den Grenzen liege $-\frac{1}{2} \leqq p' \leqq \frac{1}{2}$, weil durch die Transformation $\alpha = \delta = 1$, $\gamma = 0$, β beliebig, wenn β passend gewählt wird, p' sofort in jene Grenzen eingeschlossen werden kann. Nun ist aber

$$\bar{\tau} = i\pi \frac{-p\alpha + (p'\alpha + \beta)i}{-p\gamma + (p'\gamma + \delta)i} = -\pi \frac{p(\alpha\delta - \beta\gamma)}{p^2\gamma^2 + (p'\gamma + \delta)^2} + i\pi \frac{(p^2 + p'^2)\alpha\gamma + p'(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta}{p^2\gamma^2 + (p'\gamma + \delta)^2},$$

woraus sich zunächst ergiebt, *dass eine Transformation, in welcher $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht 1, sondern -1 wäre, nicht möglich ist, weil in diesem Falle der reelle Theil von $\bar{\tau}$ positiv würde, und daher die ϑ-Reihen nicht convergiren könnten.* Ist $\alpha\delta - \beta\gamma = n$, so nennt man die zugehörige Transformation eine Transformation vom n^{ten} Grade.

Nun ist aber offenbar der reelle Theil von $\bar{\tau}$, also $(-p\pi) : (p^2\gamma^2 + (p'\gamma + \delta)^2)$, seinem absoluten Betrage nach dann grösser als der absolute Betrag des reellen Theiles von τ, also von $-p\pi$, wenn $p^2\gamma^2 + (p'\gamma + \delta)^2 < 1$ ist. Für $\gamma = 0$ ist $\delta = \pm 1$, und also $p^2\gamma^2 + (p'\gamma + \delta)^2 = 1$. Für $\delta = 0$ ist $\gamma = \pm 1$ und $p^2\gamma^2 + (p'\gamma + \delta)^2 = p^2 + p'^2$, also, da p'^2 höchstens gleich $\frac{1}{4}$ ist, kleiner als 1, wenn $p^2 < \frac{3}{4}$, oder der reelle Theil von τ seinem absoluten Betrage nach kleiner als $\pi\sqrt{\frac{3}{4}}$ ist. Hieraus folgt der von Jacobi herrührende Satz:

So lange der absolute Betrag des reellen Theiles des Moduls τ einer ϑ-Function unter $\pi\sqrt{\frac{3}{4}}$ liegt, lässt sich stets eine lineare Transformation finden, durch welche ein Modul eingeführt wird, dessen reeller Theil seinem absoluten Betrage nach den von τ übersteigt, so dass die ϑ-Reihe mit dem transformirten Modul rascher convergirt, als die mit dem Modul τ.

§ 69. **Grenzwerthe der Thetafunctionen für rein imaginäre Moduln.** Die Gleichung IV) des § 66 kann dazu benutzt werden, zu ermitteln, wie sich, für $z = 0$, die Thetafunctionen verhalten, wenn τ rein imaginär ist, wenigstens für rationale Multipla von $i\pi$. Sie bilden ein Beispiel für eine Function einer complexen Variabeln, welche über ein bestimmtes Gebiet hinaus nicht stetig fortgesetzt werden kann, weil sie längs der ganzen Begrenzung des Gebietes unstetig wird. Betrachtet man die Thetafunction als Function von τ, so ist dies Gebiet die Halbebene, in der der reelle Theil von τ negativ ist. Betrachtet man sie als Function von q, so ist das Gebiet das Innere des Einheitskreises.

Zunächst erhalten wir aus II) § 67, wenn τ der Null so genähert wird, dass der reelle Theil immer negativ ist,

$$\lim_{\tau=0} \sqrt{\frac{\tau}{-\pi}} \,.\, e^{\frac{-g^2\pi^2}{4\tau}} \,.\, \vartheta_{hg}(0, \tau) = \lim_{\tau=0} e^{\frac{1}{2}hgi\pi - \frac{g^2\pi^2}{4\tau}} \,.\, \vartheta_{gh}\left(0, \frac{\pi^2}{\tau}\right),$$

welche Gleichung für $h = 1$, $g = 1$ die Identität $0 = 0$ liefert, aber sonst die Gleichungen

$$\text{I)} \quad \lim_{\tau=0} \sqrt{\frac{\tau}{-\pi}} \,.\, \vartheta(0, \tau) = \lim_{\tau=0} \sqrt{\frac{\tau}{-\pi}} \,.\, \vartheta_{10}(0, \tau) = 1, \quad \lim_{\tau=0} \sqrt{\frac{\tau}{-\pi}}\, e^{\frac{-\pi^2}{4\tau}} \,.\, \vartheta_{01}(0, \tau) = 2.$$

Hierin kann statt $z = 0$ für z eine Grösse gesetzt werden, welche mit τ verschwindet, und es darf τ in der dieser Grösse zugewiesenen Halbebene in jeder Richtung der Null zustreben.

Wir beschränken nun unsere Untersuchungen auf den Fall $h = 0$, $g = 0$. Setzen wir dann, n als ganze Zahl vorausgesetzt, $\tau = \sigma \pm (i\pi : 2n)$, so liefert die Gleichung II) des § 67 die folgende

$$\vartheta\left(0, \sigma \pm \frac{i\pi}{2n}\right) = \sqrt{\frac{-\pi}{\sigma \pm \frac{i\pi}{2n}}} \,.\, \vartheta\left(0, \frac{\pi^2}{\sigma \pm \frac{2n}{i\pi}}\right) = \sqrt{\frac{-2n\pi}{2n\sigma \pm i\pi}} \,.\, \vartheta\left(0, \frac{4n^2\sigma\pi^2 \mp 2ni\pi^3}{4n^2\sigma^2 + \pi^2}\right).$$

Wenn hierin σ gegen 0 strebt, so nähert sich der Modul der letzten Thetafunction der 0, abgesehen von einem ganzen Multiplum von $2\pi i$. Da nun aber die Function $\vartheta_{00}(z)$ als Function ihres Moduls die

Periode $2\pi i$ hat, so können wir beim Grenzübergange in der letzten Thetafunction den imaginären Theil des Moduls ganz fortlassen, so dass wir haben

$$\lim_{\sigma=0}\sqrt{\frac{\sigma}{-\pi}}\,\vartheta\left(0,\sigma\pm\frac{i\pi}{2n}\right)=\sqrt{\pm 2ni}\lim_{\sigma=0}\sqrt{\frac{4n^2\sigma\pi^2}{-\pi(4n^2\sigma^2+\pi^2)}}\,.\,\vartheta\left(0,\frac{4n^2\sigma\pi^2}{4n^2\sigma^2+\pi^2}\right)\sqrt{\frac{4n^2\sigma^2+\pi^2}{4n^2\pi^2}},$$

und hieraus finden wir mit Hilfe der Gleichung I)

$$\text{II)}\quad \lim_{\sigma=0}\sqrt{\frac{\sigma}{-\pi}}\,.\,\vartheta\left(0,\sigma\pm\frac{i\pi}{2n}\right)=\frac{1\pm i}{2\sqrt{n}},$$

worin sich die Vorzeichen $\pm$ auf beiden Seiten entsprechen, und *worin die Wurzel positiv zu nehmen ist.*

Setzen wir $\tau=\sigma\pm\frac{i\pi}{2n+1}$, so liefert die Gleichung II) des § 67

$$\vartheta\left(0,\sigma\pm\frac{i\pi}{2n+1}\right)=\sqrt{\frac{-(2n+1)\pi}{(2n+1)\sigma\pm i\pi}}\,\vartheta\left(0,\frac{(2n+1)^2\sigma\pi^2\mp(2n+1)i\pi^3}{(2n+1)^2\sigma^2+\pi^2}\right)$$
$$=\sqrt{\frac{-(2n+1)\pi}{(2n+1)\sigma+i\pi}}\,.\,\vartheta_{01}\left(0,\frac{(2n+1)^2\sigma\pi^2\mp(2n+1)i\pi^3}{(2n+1)^2\sigma^2+\pi^2}-i\pi\right).$$

Hier nähert sich der Modul mit σ, abgesehen von einem ganzen Multiplum von $2\pi i$, der 0, wir können daher beim Grenzübergange den imaginären Theil ganz fortlassen, weil $\vartheta_{01}(z)$ in Bezug auf τ ebenfalls die Periode $2i\pi$ hat, und erhalten sonach

$$\lim_{\sigma=0}\sqrt{\frac{-\sigma}{\pi}}\,.\,e^{\frac{-\pi^2}{4(2n+1)^2\sigma}}\,.\,\vartheta\left(0,\sigma\pm\frac{i\pi}{2n+1}\right)$$
$$=\sqrt{\pm(2n+1)i}\lim_{\sigma=0}\sqrt{\frac{(2n+1)^2\sigma\pi^2}{-\pi[(2n+1)^2\sigma^2+\pi^2]}}\,.\,e^{-\frac{\pi^2+(2n+1)^2\sigma^2}{4(2n+1)^2\sigma^2}}\,.\,\vartheta_{01}\left(0,\frac{(2n+1)^2\sigma\pi^2}{(2n+1)^2\sigma^2+\pi^2}\right)\sqrt{\frac{(2n+1)^2\sigma^2+\pi^2}{(2n+1)^2\pi^2}}$$

und hieraus nach I)

$$\text{III)}\quad \lim_{\sigma=0}\sqrt{\frac{-\sigma}{\pi}}\,.\,e^{\frac{-\pi^2}{4(2n+1)^2\sigma}}\,.\,\vartheta\left(0,\sigma\pm\frac{i\pi}{2n+1}\right)=\frac{1\pm i}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{2},$$

worin sich die Vorzeichen $\pm$ auf beiden Seiten entsprechen, und die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Ordnen wir die Reihe $\vartheta(z)=\mathfrak{S}\,e^{\tau m^2+2mz}$ so an, dass wir die Glieder, welche um μ Stellen auseinanderstehen, für sich summiren, so finden wir

$$\vartheta(z,\tau)=\mathfrak{S}\,e^{\tau(m\mu)^2+2(m\mu)z}+e^{\tau(m\mu+1)^2+2(m\mu+1)z}+\ldots+e^{\tau(\mu m+\mu-1)^2+2(m\mu+\mu-1)z}$$
$$=\sum_{(r)}^{r=\mu-1}\!\!{}_{r=0}\;\mathfrak{S}\,e^{\tau\mu^2m^2+2m(\mu r\tau+\mu z)+2rz+r^2\tau},$$

oder

$$\text{IV)}\quad \vartheta(z,\tau)=\sum_{(r)\,r=0}^{r=\mu-1}e^{2rz+r^2\tau}\,.\,\vartheta[\mu(z+r\tau),\tau\mu^2].$$

Wenden wir nun diese Transformation auf die Function $\vartheta\left(0,\sigma+\frac{m}{n}i\pi\right)$ an, indem wir $2n$ für μ wählen und m als relative Primzahl zu n voraussetzen, so erhalten wir

$$\vartheta\left(0,\sigma+\frac{mi\pi}{n}\right)=\sum_{(r)\,r=0}^{r=2n-1}e^{r^2\left(\sigma+\frac{mi\pi}{n}\right)}\,.\,\vartheta(2n\sigma r,4\sigma n^2)=\sum_{(r)\,r=0}^{r=2n-1}\sqrt{\frac{-\pi}{4\sigma n^2}}\,e^{\frac{r^2mi\pi}{n}}\,.\,\vartheta\left(\frac{i\pi r}{2n},\frac{\pi^2}{4n^2\sigma}\right),$$

worin wir auf jedes einzelne Glied der Summe die Gleichung II) des § 67 angewendet haben. Multipliciren wir diese Gleichung mit $\sqrt{\frac{\sigma}{-\pi}}$ und gehen mit σ zur Grenze 0 über, so erhalten wir

$$\text{V)}\quad \lim_{\sigma=0}\sqrt{\frac{\sigma}{-\pi}}\,\vartheta\left(0,\sigma+\frac{mi\pi}{n}\right)=\frac{1}{2n}\sum_{(r)\,0}^{2n-1}e^{r^2m\frac{2\pi i}{2n}}=\frac{\varphi(m,2n)}{2n}$$

nach der Gaussischen Bezeichnung dieser Summe. Für $m=\pm 1$ folgt aus den Gleichungen II) und III)

$$\text{VI)} \begin{cases} \varphi(\pm 1, 2n) = (1 \pm i)\sqrt{n}, & n \equiv 0(2), \\ \varphi(\pm 1, 2n) = 0, & n \equiv 1(2), \end{cases}$$

worin das Wurzelzeichen positiv zu nehmen ist.

Mit Hilfe des bekannten Satzes*) $\varphi(hm, n) . \varphi(hn, m) = \varphi(h, mn)$ folgt hieraus für ungerade n leicht die Gleichung

$$\text{VII)} \quad \varphi(1, n) = \frac{1+i}{1+i^n} . \sqrt{n} = i^{\frac{1}{4}(n-1)^2} . \sqrt{n}.$$

Ist m gerade und n ungerade, so kann man IV) wieder anwenden, indem man n für μ setzt, wodurch man die Gleichung erhält

$$\vartheta\left(0, \sigma + \frac{mi\pi}{n}\right) = \sum_0^{n-1}{}_{(r)} e^{r^2\left(\sigma + \frac{mi\pi}{n}\right)} . \vartheta(n\sigma r, \sigma n^2) = \sum_0^{n-1}{}_{(r)} \sqrt{\frac{-\pi}{\sigma n^2}} e^{r^2 \frac{mi\pi}{n}} . \vartheta\left(\frac{i\pi r}{n}, \frac{\pi^2}{\sigma n^2}\right)$$

und hieraus

$$\text{VIII)} \quad \lim_{\tau=0} \sqrt{\frac{\sigma}{-\pi}} . \vartheta\left(0, \sigma + \frac{mi\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_{(r)} e^{r^2 \frac{mi\pi}{n}} = \frac{1}{n} \varphi(\tfrac{1}{2} m, n).$$

Betrachtet man nun die Gaussischen Summen $\varphi(p, q)$, worin p und q relative Primzahlen sind, als bekannte Grössen, was um so mehr gestattet ist, als ihre Auswerthung nur niedere zahlentheoretishe Mittel erfordert, nachdem die Gleichungen VI), VII) gefunden sind, so ist das Verhalten der Function $\vartheta(0, \tau)$ für solche τ, welche gegen ein rationales Multiplum von $i\pi$ streben, durch die Gleichungen V) und VIII) bestimmt.

§ 70. Die lineare Transformation der Function $sa^2 u$. Da die Thetafunctionen unendlich viele Formen der Darstellung besitzen, so ist dies auch mit den elliptischen Functionen der Fall. Ersetzen wir die π_1, π_2 durch K, iK', so sind wir übereingekommen, zwischen diesen Grössen eine Beziehung, $2\pi : K = \vartheta^2 = \Theta^2$, vorauszusetzen. Zwischen den Grössen $\bar{\pi}_1$ und $\bar{\pi}_2$ wird im Allgemeinen die entsprechende Beziehung nicht statthaben, wir wollen deshalb

$$\alpha iK' + \beta K = \varrho i\mathfrak{K}', \quad \gamma iK' + \delta K = \varrho \mathfrak{K}; \quad K = \alpha\varrho\mathfrak{K} - \gamma\varrho i\mathfrak{K}', \quad iK' = -\beta\varrho\mathfrak{K} + \delta\varrho i\mathfrak{K}'$$

setzen und ϱ so bestimmt denken, dass $\sqrt{(2\pi : \mathfrak{K})} = \vartheta(0, -\pi\mathfrak{K}' : \mathfrak{K})$ ist. Zur Abkürzung werde

$$\vartheta_{hg}\left(\frac{-i\pi u}{2\varrho\mathfrak{K}}, \frac{-\pi\mathfrak{K}'}{\mathfrak{K}}\right) = H_{hg}\left(\frac{u}{\varrho}\right), \; H^2_{10} : H^2 = \mathfrak{k}, \; H^2_{01} : H^2 = \mathfrak{k}',$$

$$sa(u, k) = sa\,u, \quad sa\left(\frac{u}{\varrho}, \mathfrak{k}\right) = \mathfrak{sa}\left(\frac{u}{\varrho}\right), \quad ca\left(\frac{u}{\varrho}, \mathfrak{k}\right) = \mathfrak{ca}\left(\frac{u}{\varrho}\right), \quad da\left(\frac{u}{\varrho}, \mathfrak{k}\right) = \mathfrak{da}\left(\frac{u}{\varrho}\right)$$

gesetzt. Dann liefert uns die Gleichung I) des § 67

$$\Theta_{hg}(u) = \varepsilon_{hg} C H_{h'g'}\left(\frac{u}{\varrho}\right) e^{\frac{-i\pi u^2}{4\varrho K\mathfrak{K}}},$$

worin ε_{hg} eine numerische Grösse, C von hg unabhängig, und $h' = -g\gamma + h\delta + \gamma\delta$, $g' = g\alpha - h\beta + \alpha\beta$ ist. Hieraus folgt

$$\text{I)} \quad sa\,u = \frac{\Theta_{11}(u)}{\Theta_{01}(u)} . \frac{\Theta}{\Theta_{10}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}i\pi\beta\gamma} H_{\delta-\gamma+\gamma\delta, \alpha-\beta+\alpha\beta}\left(\frac{u}{\varrho}\right)}{H_{\gamma\delta-\gamma, \alpha\beta+\alpha}\left(\frac{u}{\varrho}\right)} . \frac{H_{\gamma\delta, \alpha\beta}}{H_{\gamma\delta+\delta, \alpha\beta-\beta}}.$$

Der constante Factor hätte aus Betrachtung der ε_{hg} ermittelt werden können, doch ist er hier einfacher dadurch gefunden, dass $u = K$, $sa\,u = 1$ gesetzt wurde. Es ist dann

$$u : \varrho = \alpha\mathfrak{K} - \gamma i\mathfrak{K}', \quad H_{hg}(\alpha\mathfrak{K} - \gamma i\mathfrak{K}') = \vartheta_{hg}(-\tfrac{1}{2}i\pi\alpha + \tfrac{1}{2}\bar{\tau}\gamma, \bar{\tau}), \quad \bar{\tau} = -\pi\mathfrak{K}' : \mathfrak{K}.$$

Die Formeln V) des § 47 liefern hieraus das gewünschte Resultat.

Sind α und δ ungerade, β und γ gerade Zahlen, so folgt aus I) mit Rücksicht auf IV) § 47

$$\text{II)} \quad sa\,u = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \mathfrak{sa}(\varrho u), \quad \varrho = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}, \quad sa\,u = \mathfrak{sa}\,u, \quad \mathfrak{k} = (-1)^{\frac{1}{2}\beta} k.$$

Die Grösse ϱ findet man, wenn man $u = 0$ setzt, und da $\mathfrak{sa}\,u$ ungerade ist, so kann man $(-1)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}$

*) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie herausgegeben von Dedekind, 1. Aufl., pag. 325. — Gauss Werke, Band I pag. 442 und Band II pag. 11.

ohne Weiteres unterdrücken, da die Transformation $sa\,u = -sa-u$ unwesentlich ist. Für $u = K+iK'$, $u:\varrho = (\alpha-\beta)\mathfrak{K}+(\delta-\gamma)i\mathfrak{K}'$ giebt II) die Gleichung

$$1:k = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}(-1)^{\frac{(\alpha-\beta-1)}{2}}:\mathfrak{k} = (-1)^{\frac{1}{2}\beta}:\mathfrak{k},\quad \mathfrak{k} = (-1)^{\frac{1}{2}\beta}k.$$

Da sich nun die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf unendlich viele Weisen so wählen lassen, dass α, δ ungerade sind, dass γ gerade und β durch vier theilbar ist, so giebt es zu einem k, zu dem ein τ und also ein q vorhanden ist, unzählig viele andere τ oder q, die zu demselben k gehören. Da aber auch β unendlich oft $\equiv 2 \pmod 4$ gewählt werden kann, so giebt es auch zu $-k$ unendlich viele q, wenn ein solches zu k vorhanden ist.

Vermehrt man τ um $2i\pi$, $2iK'$ um $4K$, so geht k in $-k$ über. Die Function $sa\,u$ ändert sich dabei gar nicht. Für $u = iK'+K$ ist $sa\,u = 1:k$. Nimmt man aber $iK'+2K = i\mathfrak{K}'$ für iK', so wird $sa\,u$ für $u = i\mathfrak{K}'+K$ gleich $-1:k$. Die Transformation des Moduls k in $-k$ bringt daher an $sa\,u$ gar keine Veränderung hervor, und es wird nur der eine Periodicitätsmodul gewissermassen subjectiv anders gewählt. Diese Transformation ist demnach unwesentlich.

Ist β gerade, γ ungerade, so dass α, δ ungerade sind, so ist

$$\text{III)}\quad sa\,u = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)}\mathfrak{k}\,\mathfrak{sa}(u:\varrho),\quad \varrho = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)}\mathfrak{k},\quad \mathfrak{k} = \pm 1:k,\quad k\,sa\,u = \mathfrak{sa}(uk).$$

Diese Transformation drückt die Function $sa\,u$ mit dem Modul k durch eine solche mit dem Modul $1:k$ aus. Giebt es zu einem k ein q, so giebt es auch unendlich viele Werthe von q, für welche der Modul $1:k$ ist, so dass der Modul einer elliptischen Function absolut kleiner oder gleich Eins angenommen werden darf. Der einfachste Fall dieser Transformation ist $\beta = 0$, $\alpha = \gamma = \delta = 1$. Es folgt noch

$$\text{III}^{a})\quad da\,u = \mathfrak{ca}(ku),\quad ca\,u = \mathfrak{da}(uk).$$

Ist β ungerade, δ gerade, α gerade, oder ist, um den einfachsten Fall zu betrachten, $\alpha = \delta = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, so dass

$$\mathfrak{q} = e^{\frac{-\pi K}{K'}} = e^{\frac{-\pi^2}{\tau}}$$

wird, so folgt

$$\text{IV)}\quad i\,sa\,u = \mathfrak{sa}(ui):\mathfrak{ca}(ui) = \mathfrak{tga}(ui),\quad \mathfrak{k} = k' = \sqrt{1-k^2},\quad ca(ui) = 1:\mathfrak{ca}\,u,\quad da(ui) = \mathfrak{da}\,u:\mathfrak{ca}\,u.$$

Diese Transformation verwandelt den Modul k in den complementären k' und führt ein imaginäres Argument ein. Für reelle k kleiner als Eins kann sie dazu dienen, der Function $sa(u+iv)$ die Form $P+iQ$ zu geben. Denn es ist

$$sa(u+iv) = \frac{sa\,u\,ca\,iv\,da\,iv + sa\,iv\,ca\,u\,da\,u}{1-k^2 sa^2 u\, sa^2 iv} = \frac{sa\,u\,\mathfrak{da}\,v + i\,ca\,u\,da\,u\,\mathfrak{sa}\,v\,\mathfrak{ca}\,v}{\mathfrak{ca}^2 v + k^2 sa^2 u\,\mathfrak{sa}^2 v}.$$

Giebt es ein q zu einem Modul k, so giebt es auch zum Modul k' unendlich viele Werthe von q.

Ist α gerade, und sind β, γ, δ ungerade, ist z. B.

$$\alpha = 0,\quad \beta = -1,\quad \gamma = 1,\quad \delta = 1,\quad \mathfrak{q} = e^{\frac{-\pi^2}{\tau+i\pi}} = e^{\frac{-\pi K}{K'-iK}},$$

so folgt

$$\text{V)}\quad ik'\,sa\,u = \mathfrak{sa}(iuk'):\mathfrak{da}(iuk'),\quad \mathfrak{k} = 1:k'.$$

Ist δ gerade, und sind α, β, γ ungerade, ist z. B.

$$\delta = 0,\quad \alpha = 1,\quad \beta = -1,\quad \gamma = 1,\quad \mathfrak{q} = e^{i\pi\frac{(\tau-i\pi)}{\tau}} = -e^{\frac{-\pi^2}{\tau}},$$

so folgt

$$\text{VI)}\quad ik\,sa\,u = \mathfrak{sa}(iuk):\mathfrak{ca}(iuk) = \mathfrak{tga}(iuk),\quad \mathfrak{k} = ik':k.$$

Ist γ gerade, und sind α, β, δ ungerade, z. B. $\gamma = 0$, $\alpha = \delta = \beta = 1$, so folgt

$$\text{VII)}\quad k'\,sa\,u = \mathfrak{sa}(uk'):\mathfrak{da}(uk'),\quad \mathfrak{k} = ik:k'.$$

Betrachtet man die gefundenen Beziehungen, indem man sie aufs Quadrat erhebt, als Transformationsformeln der Function $sa^2 u$, so sind die gefundenen Gleichungen

$$\text{VIII)}\left\{\begin{array}{l} k^2 sa^2(u,k) = sa^2(uk,(1:k)),\quad -sa^2(u,k) = sa^2(ui,k'):ca^2(ui,k') = tga^2(ui,k'),\\[2mm] -k'^2 sa^2(u,k) = \dfrac{sa^2\left(iuk',\frac{1}{k'}\right)}{da^2\left(iuk',\frac{1}{k'}\right)},\quad k^2 sa^2(u,k) = \dfrac{sa^2\left(iuk,\frac{ik'}{k}\right)}{ca^2\left(iuk,\frac{ik'}{k}\right)},\quad k^2 sa^2(u,k) = \dfrac{sa^2\left(uk',\frac{ik}{k'}\right)}{da^2\left(uk',\frac{ik}{k'}\right)} \end{array}\right.$$

lineare Gleichungen, die lineare Transformation der Theta zieht die lineare Transformation der Function sa^2u nach sich. In Bezug auf $sa\,u$ ist die Transformation quadratisch. Die Thetafunctionen stehen eben den Quadraten der elliptischen Functionen näher, als diesen selbst.

§ 71. **Berechnung von q für ein gegebenes k.** Es ist die Frage zu erledigen, ob sich zu jedem k ein q finden lässt, und im Falle der Bejahung sind Mittel zur Berechnung von q oder τ anzugeben. Hierzu erweist sich die Gleichung $\sqrt{k'} = \vartheta_{01} : \vartheta$ oder $\sqrt{k'}\vartheta - \vartheta_{01} = 0$ als besonders dienlich. Durch Division derselben mit $2(1+\sqrt{k'})$, erhält man

$$\text{I)}\quad \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} - q + \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\,q^4 - q^9 + \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\,q^{16} - q^{25} + \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\,q^{36} - . + \ldots = 0.$$

Giebt es ein diese Gleichung befriedigendes q, so giebt es deren nach § 70 unendlich viele; die Methode des § 29 liefert den Zweig dieser Function, der mit $(1-\sqrt{k'}):(1+\sqrt{k'})$ verschwindet. Dieselbe Methode lehrt zugleich, dass es gewiss ein Gebiet in der Umgebung des Punktes $k=0$ giebt (für welchen auch $(1-\sqrt{k'}):(1+\sqrt{k'})$ gleich Null ist), in welchem sich q in eine nach Potenzen von $(1-\sqrt{k'}):(1+\sqrt{k'})$ fortschreitende Reihe entwickeln lässt, die q als Function von k definirt und die Existenz dieser Grösse in einem gewissen Gebiete erweist. Für $\sqrt{k'}$ ist diejenige Wurzel zu setzen, die für $k=0$ den Werth Eins annimmt. Setzen wir $(1-\sqrt{k'}):(1+\sqrt{k'})$ zur Abkürzung gleich l, entwickeln q nach Potenzen von l, so lässt sich von dieser Reihe a priori erkennen, dass die Potenzexponenten ihrer Terme durch vier dividirt sämmtlich den Rest Eins lassen. Denn die Gleichung I) bleibt ungeändert, wenn man iq für q und zugleich il für l setzt; die Reihe muss daher den Factor i gewinnen, wenn man il für l setzt.*) Setzt man nun die Reihe $l(a_0 + a_1 l^4 + a_2 l^8 + \ldots)$ in die Gleichung I) ein, so erhält man für a_0 sogleich den Werth $\frac{1}{2}$, und für die folgenden a eine Recursionsformel, die zu dem Resultate führt:

$$\text{II)}\quad q = e^{-\pi K' : K} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} + \frac{2}{2^5}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^5 + \frac{15}{2^9}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^9 + \frac{150}{2^{13}}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^{13} + \frac{1707}{2^{17}}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^{17} + \ldots$$

Von dieser Reihe werden wir später nachweisen, dass sie für jeden Werth von k convergirt. Aber auch mit den bisher gegebenen Mitteln reicht sie aus nachzuweisen, dass für jedes k ein q existirt. Im § 29 ist ein gewisses Convergenzgebiet für diese Reihe a priori bestimmt, die specielle Form der Gleichung I) gestattet aber, dieses Gebiet für den vorliegenden Fall bedeutend zu erweitern. Setzen wir für den Augenblick $q = \frac{1}{2}\lambda$, so gewinnt die Gleichung I) die Form

$$\text{I}^a)\quad l = \lambda - \frac{l\lambda^4}{2^3} + \frac{\lambda^9}{2^8} - \frac{l\lambda^{16}}{2^{15}} + \ldots,$$

und es convergirt nach den Principien des § 29 die Umkehrung dieser Reihe, d. h. die λ als Function von l darstellende Reihe, rascher, als die Umkehrung der Reihe

$$l = s - \left(\frac{1}{2^8} + \frac{l}{2^3}\right)(s^2 + s^3 + s^4 + \ldots) = s - \left(\frac{1}{2^8} + \frac{l}{2^3}\right)\frac{s^2}{1-s}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt aber

$$l - s(1+l) + s^2\left(1 + \frac{1}{2^8} + \frac{l}{2^3}\right) = 0,$$

$$s = \frac{1 + l \pm \sqrt{(1+l)^2 - 4l\left(1 + \frac{1}{2^8} + \frac{l}{2^3}\right)}}{2\left(1 + \frac{1}{2^8} + \frac{l}{2^3}\right)} = \frac{1 + l \pm \sqrt{1 - \left(2 + \frac{1}{2^6}\right)l + \frac{l^2}{2}}}{2\left(1 + \frac{1}{2^8} + \frac{l}{2^3}\right)},$$

*) Von dieser Reihe habe ich zuerst durch Schlömilch's Compendium der höheren Analysis, 2. Auflage (1866), Band 2, pag. 438, Kenntniss erhalten. Herr Weierstrass hat in den Berliner Sitzungsberichten 1883 und Acta mathematica Bd. 6 aus der Eigenschaft derselben

$$q^4(k^2) = q\left(\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}\right)$$

und es lässt sich s_* nach Potenzen von l entwickeln, so lange $abs\,l$ kleiner ist, als die kleinere der Wurzeln der Gleichung
$$l^2 - 2\left(2 + \frac{1}{2^6}\right)l + 2 = 0,$$
also so lange
$$abs\,l < 2 + \frac{1}{2^6} - \sqrt{2 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{12}}}, \quad abs\,l < 2:(2 + 2^{-6} + \sqrt{(2 + 2^{-4} + 2^{-12})}),$$
also sicher so lange $abs\,l < \frac{1}{2}$ ist. Mithin convergirt auch die Reihe für $2\lambda = q$ als Potenzreihe von l sicher so lange, als $abs\,l < \frac{1}{2}$ ist; und es existirt für alle Werthe von l dieses Gebietes ein q, und also giebt es nach § 70 unendlich viele q.

Nun giebt es aber nach § 70 zu jedem $1:k^2$ ein q, wenn es ein solches für k^2 giebt, also, wenn man die $k^2 = x$ graphisch darstellt, es giebt zu jedem x ein q, wenn ein solches für jeden Werth im Innern des Einheitskreises vorhanden ist. Ebenso giebt es zu jedem $x' = 1 - x$ ein q, wenn ein solches für x vorhanden ist, nach demselben Paragraph. Also wenn man in der x-Ebene eine Gerade parallel zur imaginären Achse durch den Punkt $x = \frac{1}{2}$ zieht, so giebt es zu jedem Punkt der x-Ebene ein q, wenn es für eine der beiden durch diese Geraden bestimmten Halbebenen ein q giebt. Combinirt man die beiden Transformationen x in $1:x$ und x in x', so findet man weiter, dass zu jedem x ein q existirt, wenn zu jedem x in dem Segment des Einheitskreises, welches die zur imaginären Achse parallele Gerade durch $x = \frac{1}{2}$ bestimmt, und welches den Punkt $x = 0$ enthält, ein q existirt. Ist nun
$$abs\,l = abs\,(1 - \sqrt[4]{1-x}):(1 + \sqrt[4]{1-x}) < \tfrac{1}{2},$$
so ergiebt dies für x ein Gebiet, welches jenes Segment überall, zum Theil in sehr weitem Bogen umspannt. Daraus folgt, dass für jedes $x = k^2$ ein q existirt, und dass mithin unendlich viele q existiren. Die Reihe II) ist wegen ihrer guten Convergenz praktisch sehr brauchbar namentlich für reelle $k < \sqrt{\frac{1}{2}}$. Ist $\sqrt{\frac{1}{2}} < k < 1$, so thut man besser, die Grösse $q' = e^{-\pi K:K'}$ zu berechnen mittels der Reihe
$$\text{III)}\quad q' = e^{-\pi K:K'} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} + \frac{2}{2^5}\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^5 + \frac{15}{2^9}\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^{25} + \dots,$$
woraus man q mittels der Gleichung $lg\,q\,.\,lg\,q' = \pi^2$ findet. Dass aber q in q', K in K', K' in K übergeht, wenn man k in k' verwandelt, weiss man aus IV) § 70.

§ 72. **Die ebenen Curven dritter Ordnung ohne Doppelpunkte.** Eine solche Curve besitzt wenigstens einen reellen Wendepunkt, und von diesem eine ausser der Wendetangente reelle Tangente an die Curve. Da es sich hier um einige projectivische Eigenschaften dieser Curve handeln wird, so können wir die Curve so auf eine andere projiciren, dass die Wendetangente die unendlich ferne Gerade wird, und der Wendepunkt auf der y-Achse liegt, und dass die von ihm an die Curve gezogene Tangente die y-Achse selbst, und der Berührungspunkt der Coordinatenanfang wird. In der Gleichung dieser Curve müssen die Glieder dritter Dimension sich auf die dritte Potenz von x reduciren, y darf nur im Quadrat vorkommen, und das von xy freie Glied muss fehlen, kurz die Gleichung muss die Form haben
$$y^2 = ax(b-x)(c-x),^*$$
oder jede Curve dritter Ordnung ist der, welche die aufgestellte Gleichung besitzt, collinear. Dabei können b und c complex sein; da aber auch zu complexen Moduln elliptische Functionen nach dem vorigen Paragraphen vorhanden sind, so ist dies hier gleichgiltig. Setzen wir nun
$$x = b\,sa^2(u,k), \quad k^2 = b:c, \quad y^2 = ab^2c\,sa^2u\,ca^2u\,da^2u, \quad y = b\sqrt{ac}\,sa\,u\,ca\,u\,da\,u,$$
so sind x und y eindeutig durch u als Parameter durch elliptische Functionen dargestellt. Curven mit dieser Eigenschaft heissen Curven vom Geschlecht Eins. Setzt man nun
$$x = b\,sa^2u = \varphi(u), \quad y = b\sqrt{ac}\,sa\,u\,sa'u = \psi(u),$$

---

ihre Convergenz für jedes k erwiesen. Auch zeigt er, dass die $a_0, a_1, a_2, \dots$ sämmtlich positiv sind. Herr Mertens (Wiener Berichte 1885 II, Seite 974) vereinfacht die Untersuchung und findet noch
$$a_n < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2n-1}.$$

so sind $\varphi(u)$, $\psi(u)$ doppelt periodische Functionen mit den Perioden $2K$, $2iK'$, und jede lineare Verbindung derselben wird im Elementarparallelogramm dreimal unendlich gross, ist eine doppelt periodische Function dritter Ordnung. Ein Punkt der Curve, dessen Parameter den Werth u hat, mag der Punkt u genannt werden.

Die Summe der drei Werthe, für welche die Function

$$Ax+By+C=A\varphi(u)+B\psi(u)+C$$

verschwindet, also die Summe dreier Werthe von u, deren Punkte auf einer Geraden liegen, ist, unabhängig von ABC, congruent iK', weil die Summe der drei Punkte Unendlich diesem Werthe congruent ist (§ 38). Umgekehrt, ist die Summe dreier Werthe von u, etwa $u_1+u_2+u_3\equiv iK'$, so liegen die drei Punkte u in einer Geraden. Sollen die Punkte u_1, u_2, u_3 zusammenfallen, so muss $3u\equiv iK'$ sein, dies giebt neun verschiedene Werthe von u, nämlich

$$\begin{array}{lll} \tfrac{1}{3}iK', & \tfrac{1}{3}iK'+\tfrac{2}{3}K, & \tfrac{1}{3}iK'+\tfrac{4}{3}K, \\ iK', & iK'+\tfrac{2}{3}K, & iK'+\tfrac{4}{3}K, \\ \tfrac{5}{3}iK', & \tfrac{5}{3}iK'+\tfrac{2}{3}K, & \tfrac{5}{3}iK'+\tfrac{4}{3}K. \end{array}$$

Es giebt also 9 gerade Linien, die die Curven nur an einer Stelle, dort aber dreimal, treffen, es giebt 9 Wendetangenten, 9 Wendepunkte. Greift man irgend zwei dieser heraus, so ist ihre Summe congruent einem dritten, nur ist der dritte der erste wieder, wenn die beiden ersten dieselben waren. Es folgt daraus: wenn eine Gerade durch zwei Wendepunkte geht, so geht sie allemal auch noch durch einen dritten.

Durch jeden Wendepunkt gehen vier solcher Drei-Wendepunktslinien, und es giebt deren im Ganzen zwölf. — Sind u_1, u_2, u_3 drei Punkte in einer Secante, u'_1, u'_2, u'_3 die einer zweiten, so sind die Punkte $u''_1=iK'-u_1-u'_1$, $u''_2=iK'-u_2-u'_2$, $u''_3=iK'-u_3-u'_3$ wiederum Punkte einer Secante, denn ihre Summe ist $\equiv iK'$. Eine Folge hiervon ist der Satz: Zieht man in den Schnittpunkten einer Secante Tangenten an die Curve, so treffen diese die Curve in drei Punkten einer Secante. Durch einen Punkt u der Curve giebt es vier Tangenten an die Curve, deren Berührungspunkte

$$\tfrac{1}{2}(iK'-u),\quad \tfrac{1}{2}(iK'-u)+K,\quad \tfrac{1}{2}(iK'-u)+iK',\quad \tfrac{1}{2}(iK'-u)+K+iK'$$

sind. Diese Punkte bilden ein Vierseit, dessen Diagonalecken (Schnittpunkte der Diagonalen) ebenfalls auf der Curve liegen. Die Summe zweier der vier Punkte ist congruent der Summe der beiden andern. Bildet man die Summe zweier Punkte und zieht sie von iK' ab, so erhält man den Schnitt der Verbindungslinie mit der Curve, er ist derselbe als der der Verbindungslinie der beiden andern Punkte.

Sechs Punkte, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, liegen auf einem Kegelschnitte, wenn $u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6\equiv 0$ ist. Es giebt 36 Kegelschnitte, welche die Curve in einem Punkte sechsfach berühren. Davon zerfallen jedoch 9 in zwei auf einander fallende Gerade, die Wendetangenten. Also giebt es nur 27 eigentliche sechsfach berührende Kegelschnitte (Clebsch, Crelle's Journal Band 64).

Aehnliche Anwendungen der elliptischen Functionen lassen die Raumcurven erster Species vierter Ordnung zu. Ihre Coordinaten lassen sich in die Form bringen $x=c_1\,sa\,u$, $y=c_2\,ca\,u$, $z=c_3\,da\,u$ (vergl. E. Lange, Schlömilch's Zeitschrift Jahrgang XXVIII pag. 1).

§ 73. Berechnung des Argumentes u. Das Pendel. Ist nicht das Argument einer elliptischen Function, sondern diese selbst gegeben, das Argument gesucht, so geht die Beantwortung dieser Frage im Grunde der Theorie der Umkehrung der elliptischen Functionen, der Theorie der elliptischen Integrale an. Wenn es jedoch gilt, für reelle oder rein imaginäre u und k die ersteren aus den elliptischen Functionen näherungsweise auszuwerthen, so liefert die Darstellung der Thetafunctionen wegen der ausgezeichneten Convergenz derselben dazu Mittel, welche im Allgemeinen wenigstens wenn man noch die einfachen Transformationen der folgenden Paragraphen mit heranzieht, die besten sind, zum Ziele zu gelangen. Es sind für reelle u und für reelle Werthe von k kleiner als Eins von Legendre Tafeln zur Berechnung von u angefertigt. Tafeln mit zwei Eingängen sind aber immer unbequem, man wird sie gern vermeiden. Es entsteht deshalb die Aufgabe, die Rechnungen in

praktischen Problemen, in denen elliptische Funktionen vorkommen, in ihren Endresultaten auf eine solche Form zu bringen, in denen man zur näherungsweisen Berechnung nur noch die Logarithmen der trigonometrischen Functionen und der gemeinen Zahlen benöthigt. Aus dem Umstande, dass diese Tafeln in der Regel sieben oder weniger Stellen enthalten, darf man wohl schliessen, dass eine Genauigkeit, die Rechnungsresultate auf 7 oder 8 Stellen richtig angiebt, für praktische Zwecke ausreicht. Unter dieser Voraussetzung dürften die für u aus der Theorie der Thetafunktionen sich ergebenden Darstellungsformeln immer genügen.

Es sei $da\,u$ gegeben. So giebt die Gleichung $da\,u = \sqrt{k'}\,\Theta(u) : \Theta_{01}(u)$ die Beziehung

$$\sqrt{k'} - da\,u + 2q(\sqrt{k'} + da\,u)\cos\frac{u\pi}{K} + 2q^4(\sqrt{k'} - da\,u)\cos\frac{2u\pi}{K} + 2q^9(\sqrt{k'} + da\,u)\cos\frac{3u\pi}{K} + \ldots,$$

$$\text{I)}\quad \cos\frac{u\pi}{K} = \frac{1}{2q}\cdot\frac{da\,u - \sqrt{k'}}{da\,u + \sqrt{k'}} + q^3\frac{da\,u - \sqrt{k'}}{da\,u + \sqrt{k'}}\cos\frac{2u\pi}{K} + q^8\cos\frac{3u\pi}{K} + \ldots.$$

Ist nun q eine reelle Grösse und $k^2 < 1$, und ist u reell, so ist $(da\,u - \sqrt{k'}) : (da\,u + \sqrt{k'}) < 2q$, und man darf sich auf das erste Glied dieser Reihe beschränken, wenn man $2q^4$ vernachlässigen darf. Es wird deshalb versucht werden müssen, einen solchen Modul der elliptischen Functionen (durch Transformation) einzuführen, für welchen $2q^4$ erst eine Wirkung auf die 9te Decimale ausübt, wenn mit den gewöhnlichen Logarithmentafeln gerechnet werden soll. Man kann unter dieser Voraussetzung die Formeln leicht, wie man sich auszudrücken pflegt, logarithmisch, d. h. für die logarithmische Berechnung bequem machen. Den logarithmus vulgaris bezeichnen wir mit lgv zum Unterschied vom logarithmus naturalis, der nur mit lg bezeichnet wird. Man setze $\sqrt{k'} = \cos\beta$, so ist (näherungsweise)

$$\text{II)}\quad q = \tfrac{1}{2}\,\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta} = \tfrac{1}{2}\,tg^2\tfrac{1}{2}\beta.$$

Wird dann weiter $da\,u = \cos\omega$ gesetzt, so ist (näherungsweise)

$$\text{III)}\quad \cos\frac{u\pi}{K} = \frac{1}{2q}\,\frac{\cos\omega - \cos\beta}{\cos\omega + \cos\beta} = cotg^2\tfrac{1}{2}\beta\; tg\tfrac{1}{2}(\beta + \omega)\; tg\tfrac{1}{2}(\beta - \omega),\quad K = \tfrac{1}{2}\pi(1 + 2q)^2 = \frac{\pi}{2\cos^4\frac{1}{2}\beta}.$$

Ein einfaches Beispiel für Anwendung dieser Formeln giebt das mathematische Pendel. Bedeutet v die Geschwindigkeit eines mathematischen Pendels von der Länge 1, x die Erhebung über die tiefste Stelle zur Zeit t, h die Maximalerhebung, φ die Neigung gegen die Vertikale, α die Maximalneigung, x' die in der Richtung der Vertikalen gemessene Geschwindigkeit, φ' die Winkelgeschwindigkeit, T die Schwingungsdauer, so ist

$$v^2 = 2g(h - x),\quad v^2 = x'x' : x(2 - x),\quad x' = \sqrt{2g\,.\,x\,.\,\overline{h - x}\,.\,\overline{2 - x}},\quad x = h\,sa^2\sqrt{gt},$$
$$k = \sqrt{\tfrac{1}{2}h} = \sin\tfrac{1}{2}\alpha,\quad k' = \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \cos^2\beta,\quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,\quad \psi = 2\varphi,\quad q = \tfrac{1}{2}\,tg^2\tfrac{1}{2}\beta,$$
$$x = 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi,\quad \sin\tfrac{1}{2}\varphi = k\,sa\sqrt{gt},\quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi = da\sqrt{gt},\quad \varphi' = 2\sqrt{g}\sqrt{\sin\frac{\alpha + \varphi}{2}\sin\frac{\alpha - \varphi}{2}},$$
$$K = \pi : 2\cos^4\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\pi(1 + 2q)^2,\quad T = 2K : \sqrt{g} = \pi : \sqrt{g}\cos^4\tfrac{1}{2}\beta,$$
$$\cos(2\sqrt{gt}\cos^4\tfrac{1}{2}\beta) = cotg^2\tfrac{1}{2}\beta\; tg\tfrac{1}{2}(\beta + \psi)\; tg\tfrac{1}{2}(\beta - \psi).$$

Ist $\alpha = 30^0$, durchläuft also das Pendel einen Bogen von 60^0, so ist

$$k = \sin\tfrac{1}{12}\pi = \sin 15^0 = 0{,}25882,\quad lgv\,q = 7{,}63683 - 10,\quad q = 0{,}004334\ldots,\quad 2q^4 = 0{,}0000000007\ldots$$

Die Formeln sind also gegenüber den gewöhnlichen Logarithmentafeln von vollkommen ausreichender Genauigkeit.

Es lässt sich übrigens, wenn diese Genauigkeit nicht ausreicht, aus I) noch eine genauere, freilich auch unbequemere Formel ziehen. Setzt man nämlich

$$\cos\frac{2u\pi}{K} = 2\cos^2\frac{u\pi}{K} - 1,\quad N = (da\,u - \sqrt{k'}) : (da\,u + \sqrt{k'}),$$

so ergiebt sich aus I) (näherungsweise)

$$2q\cos\frac{u\pi}{K} = N + 2q^4N\left(2\cos^2\frac{u\pi}{K} - 1\right) + 2q^9\cos\frac{3u\pi}{K} + \ldots = N(1 - 2q^4) + q^2N\left(2q\cos\frac{u\pi}{K}\right)^2 + \ldots$$
$$= N(1 - 2q^4 + q^2N^2),$$

$$\text{IV)}\quad \cos\frac{u\pi}{K} = \frac{1}{2q}\,\frac{da\,u-\sqrt{k'}}{da\,u+\sqrt{k'}}\left[1-2q^4+q^2\left(\frac{da\,u-\sqrt{k'}}{da\,u+\sqrt{k'}}\right)^2\right].$$

Für rein imaginäre u kann man sich auf Werthe zwischen $-\frac{1}{2}iK'$ und $+\frac{1}{2}iK'$ beschränken wegen der Periodicität und wegen der Formeln des § 55. Die trigonometrischen Functionen sind dann nicht mehr kleiner als Eins. In vielen Fällen gelingt es aber, q so klein zu machen, dass schon q^2 vernachlässigt werden darf, und dann sind unsere Formeln auch für solche rein imaginäre u brauchbar.

§ 74. **Eine Transformation vierter Ordnung.** Dem Bestreben, ein möglichst kleines q zu gewinnen, kommt eine einfache, schon im § 53 berührte Transformation sehr entgegen. Dort fanden wir schon durch Umordnung der Terme der Thetareihe die Gleichungen, die unter I) folgen, und aus denen die unter II) von selbst fliessen:

$$\text{I)}\quad \vartheta(z,\tau)=\vartheta(2z,4\tau)+\vartheta_{10}(2z,4\tau),\quad \vartheta_{01}(z,\tau)=\vartheta(2z,4\tau)-\vartheta_{10}(2z,4\tau),$$

$$\text{II)}\quad 2\vartheta(2z,4\tau)=\vartheta(z,\tau)+\vartheta_{01}(z,\tau),\quad 2\vartheta_{10}(2z,4\tau)=\vartheta(z,\tau)-\vartheta_{01}(z,\tau).$$

Setzen wir nun $\vartheta^2_{10}(0,4\tau):\vartheta^2(0,4\tau)=\mathfrak{k}$, $\vartheta^2_{01}(0,4\tau):\vartheta^2(0,4\tau)=\mathfrak{k}'$ und benutzen die Beziehungen des § 51 zwischen Thetaquadraten, so erhalten wir die Relationen

$$\text{III)}\quad \begin{aligned} 4\vartheta^2(2z,4\tau) &= 4\left(\vartheta^2_{01}(2z,4\tau)-\mathfrak{k}\,\vartheta^2_{11}(2z,4\tau)\right):\mathfrak{k}' = \vartheta^2(z,\tau)+2\vartheta(z,\tau)\,\vartheta_{01}(z,\tau)+\vartheta^2_{01}(z,\tau),\\ 4\vartheta^2_{10}(2z,4\tau) &= 4\left(\mathfrak{k}\,\vartheta^2_{01}(2z,4\tau)-\vartheta^2_{11}(2z,4\tau)\right):\mathfrak{k}' = \vartheta^2(z,\tau)-2\vartheta(z,\tau)\,\vartheta_{01}(z,\tau)+\vartheta^2_{01}(z,\tau).\end{aligned}$$

Aus I) folgt für $z=0$

$$\text{IV)}\quad \frac{\vartheta_{01}(0,\tau)}{\vartheta(0,\tau)}=\sqrt{k'}=\frac{1-\sqrt{\mathfrak{k}}}{1+\sqrt{\mathfrak{k}}},\quad \frac{\vartheta_{10}(0,4\tau)}{\vartheta(0,4\tau)}=\sqrt{\mathfrak{k}}=\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}},\quad \mathfrak{k}=\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2,$$

aus III) aber ergiebt sich durch Division, wenn die elliptischen Functionen mit dem Modul $\mathfrak{k}$ durch $\mathfrak{sa}$, $\mathfrak{ca}$, $\mathfrak{da}\,u$ bezeichnet werden, und wenn $z=-ui\pi:K$ gesetzt wird,

$$\text{V)}\quad \frac{1-\mathfrak{k}\dfrac{\vartheta^2_{11}(2z,4\tau)}{\vartheta^2_{01}(2z,4\tau)}}{\mathfrak{k}-\dfrac{\vartheta^2_{11}(2z,4\tau)}{\vartheta^2_{01}(2z,4\tau)}}=$$

$$\frac{1-\mathfrak{k}^2\,\mathfrak{sa}^2 Mu}{\mathfrak{k}(1-\mathfrak{sa}^2 Mu)}=\frac{da^2u+2\sqrt{k'}\,da\,u+k'}{da^2u-2\sqrt{k'}\,da\,u+k'}=\left(\frac{da\,u+\sqrt{k'}}{da\,u-\sqrt{k'}}\right)^2,\quad \frac{\mathfrak{da}\,Mu}{\sqrt{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{ca}\,Mu}=\frac{da\,u+\sqrt{k'}}{da\,u-\sqrt{k'}},$$

$$\text{VI)}\quad \mathfrak{k}\,\mathfrak{sa}^2 Mu=\frac{1-da\,u}{1+da\,u}\,\frac{da\,u-k'}{da\,u+k'}=\frac{k^4\,sa^2u\,ca^2u}{(1+da\,u)^2(da\,u+k')^2},\quad \sqrt{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{sa}\,Mu=\frac{k^2\,sa\,u\,ca\,u}{(1+da\,u)(k'+da\,u)}.$$

Hier ist die Grösse M noch zu bestimmen, deren Einführung im § 55 motivirt ist. Wir erhalten dieselbe, wenn wir in der letzten Gleichung $u=0$ setzen, was ergiebt

$$\text{VII)}\quad \sqrt{\mathfrak{k}}\,M=\frac{k^2}{2(1+k')}=\frac{k^2(1-k')}{2(1+k')(1-k')}=\frac{1-k'}{2},\quad M=\frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2}.$$

Sind $4\mathfrak{K}$, $2i\mathfrak{K}'$ die Periode der Function $\mathfrak{sa}\,u$, so ist

$$\text{VIII)}\quad \mathfrak{K}':\mathfrak{K}=4K':K,\quad \mathfrak{K}=\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{k'})^2K,\quad \mathfrak{K}'=(1+\sqrt{k'})^2K',\quad \mathfrak{q}=e^{-\pi\mathfrak{K}':\mathfrak{K}}=q^4.$$

Ist k reell und einigermassen klein, so ist $\mathfrak{k}$ sehr klein; die Thetareihen, in denen q^4 für q eintritt, convergiren natürlich viel besser, woraus die Nützlichkeit dieser Transformation augenscheinlich wird. Nehmen wir zum Beispiel beim Pendelproblem an, es erhebe sich das Pendel bis zu dem Werthe $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, so dass eine ganze Schwingung einen Halbkreis durchläuft, so ist

$$k=\sin\tfrac{1}{4}\pi=\sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad lgv\,q=8{,}63563-10,\quad lg\,\mathfrak{q}=lg\,q^4=3{,}54252-10,\quad \mathfrak{q}=0{,}0000003488.$$

Bei Ausführung einer praktischen Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen wird man nicht blos $2\mathfrak{q}^4$, sondern schon $\mathfrak{q}^2$ vernachlässigen dürfen. Die Schwingungsdauer ist (näherungsweise)

$$T=2K:\sqrt{g}=8\mathfrak{K}:\sqrt{g}(1+\sqrt{k'})^2=4\pi(1+2\mathfrak{q})^2:\sqrt{g}(1+\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}})^2=4\pi(1+4\mathfrak{q}):\sqrt{g}(1+\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}})^2.$$

§ 75. **Noch eine Transformation vierter Ordnung.** Ist $k>\sqrt{\frac{1}{2}}$, so kann man sich einer Transformation bedienen, welche zwar ein rein imaginäres Argument einführt, aber gleichwohl sehr gut brauchbar ist, weil beim Rechnen mit siebenstelligen Logarithmen, oder sogar zehnstelligen, q^2 schon

vernachlässigt werden darf. Setzt man k' an Stelle von k, so ergiebt die Gleichung VI) des vorigen Paragraphen und die Transformationsformel IV) des § 70 die neue

$$\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\, sa\left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{k})^2 u\right) = 1 - \frac{k'^2 sa(u,k')\, ca(u,k')}{(1+da(u,k'))(k+da(u,k'))} = \frac{-k'^2 i\, sa\, ui}{(ca\, ui + da\, ui)(k\, ca\, ui + da\, ui)},$$

wo $sa\, ui$ den Modul k hat.

Wenn man u durch ui ersetzt und $\mathfrak{s}\mathfrak{a}\, u$ für $sa(u, \mathfrak{k})$ schreibt, wo $\mathfrak{k} = (1-\sqrt{k})^2 : (1+\sqrt{k})^2$ ist, so folgt

$$\text{I)}\quad \mathfrak{s}\mathfrak{a}\, \tfrac{1}{2} i(1+\sqrt{k})^2 u = \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \frac{i k'^2 sa\, u}{(ca\, u + da\, u)(da\, u + k\, ca\, u)} = \frac{(1+\sqrt{k})^2 i\, sa\, u}{1 + ca\, u\, da\, u - k\, sa^2 u}.$$

Die rechte Seite ist Null für $u = -iK'$, also ist $\mathfrak{K} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{k})^2 K'$. Das Argument ist also imaginär, aber q ist so klein, dass q² nicht einmal auf die zehnte Decimale einen Einfluss hat, sobald $k > \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist. Zur bequemern Rechnung setze man

$$\frac{ca\, u\, da\, u}{1 - k\, sa^2 u} = \cos\psi, \quad \frac{(1-k)\, sa\, u}{1 - k\, sa^2 u} = \sin\psi = 2 \sin\tfrac{1}{2}\psi \cos\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}\psi = \frac{1 + ca\, u\, da\, u - k\, sa^2 u}{1 - k\, sa^2 u}, \quad tg\,\tfrac{1}{2}\psi = \frac{sa\, u(1-k)}{1 + ca\, u\, da\, u - k\, sa^2 u},$$

so ist

$$\mathfrak{s}\mathfrak{a}^2\, \tfrac{1}{2} i(1+\sqrt{k})^2 u = -\left(\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\right)^2 tg^2\tfrac{1}{2}\psi, \quad \mathfrak{c}\mathfrak{a}^2\, \tfrac{1}{2} i(1+\sqrt{k})^2 u = 1 + \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2 tg^2\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\mathfrak{d}\mathfrak{a}\, \tfrac{1}{2} i(1+\sqrt{k})^2 u = 1 + \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 tg^2\tfrac{1}{2}\psi, \quad i\mathfrak{K}' = i(1+\sqrt{k})^2 K.$$

Zweiwerthige Functionen vom Geschlecht Eins und ihre Integrale.

§ 76. **Den rationalen Functionen wird eine algebraische adjungirt.** Die voraufgehenden Untersuchungen haben gezeigt, dass jede doppelt periodische Function mit den Perioden $4K$, $2iK'$ durch $S(u)$ und $S'(u)$, und jede Function mit den Perioden $2K$, $2iK'$ durch $S^2(u)$ und $(S^2(u))' = 2S(u)S'(u)$ rational dargestellt werden kann. Setzt man $S(u) = z$, so ist

$$S'(u) = S'(0)\, s = S'(0)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

oder setzt man $S^2(u) = \mathfrak{z}$, $(S^2(u))' = 2S'(0)\,\mathfrak{s} = 2S'(0)\sqrt{\mathfrak{z}(1-\mathfrak{z})(1-k^2\mathfrak{z})}$, so bilden solche doppelt periodische Functionen ein System von rationalen Functionen, entweder von s und z oder von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{z}$, und liefern einen Bereich algebraischer Functionen, der den Bereich der rationalen Functionen in sich begreift, also umfassender ist. Der Grösse z ist die algebraische Grösse $s = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$, oder der Grösse $\mathfrak{z}$ die algebraische Grösse $\sqrt{\mathfrak{z}(1-\mathfrak{z})(1-k^2\mathfrak{z})}$ adjungirt. Die rationalen Functionen eines solchen Grössenpaares bilden einen Bereich, dem wir aus später anzugebenden Gründen das Geschlecht **Eins** zuschreiben, gegenüber den rationalen Functionen einer einzigen Grundgrösse, denen wir das Geschlecht **Null** zuschreiben. — Stehen zwei algebraische Bereiche, s, z und r, t, in ein-eindeutiger Beziehung zu einander, so dass sich r und t als rationale Functionen von s und z und umgekehrt s und z als rationale Functionen von r und t darstellen lassen, so wollen wir diese Bereiche congruente nennen; jeder Function des einen Bereiches entspricht eine einzige des andern, welche zwar eine Mannigfaltigkeit von Darstellungen zulassen kann, die aber nur identische Transformationen von einander sind. — Setzt man

$$(\zeta - k_1) : (\zeta - k_2) = t^2, \quad \zeta = (k_1 - k_2 t^2) : (1 - t^2),$$

$$\sigma = \sqrt{(\zeta - k_1)(\zeta - k_2)} = (\zeta - k_2)\sqrt{(\zeta - k_1) : (\zeta - k_2)} = (\zeta - k_2)\, t,$$

so erkennt man, dass die rationalen Functionen von σ und ζ sich durch die Grösse t allein rational darstellen lassen, und dass umgekehrt alle rationalen Functionen von t rational durch σ und ζ darstellbar sind. Der Bereich σ, ζ ist dem Bereiche t, dem gewöhnlichen Bereiche rationaler Functionen, congruent. — Die beiden Bereiche s, z und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{z}$ sind nicht congruent, da zwar $\mathfrak{z} = z^2$, $\mathfrak{s} = z \cdot s$ ist, aber nicht umgekehrt s und z rational durch $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{z}$ ausgedrückt werden können, wie die Functionen von $S^2(u)$ und $(S^2(u))'$ zwar die Perioden $4K$, $2iK'$ haben, aber die Functionen von $S(u)$ und $S'(u)$ nicht alle die Perioden $2K$, $2iK'$ besitzen.

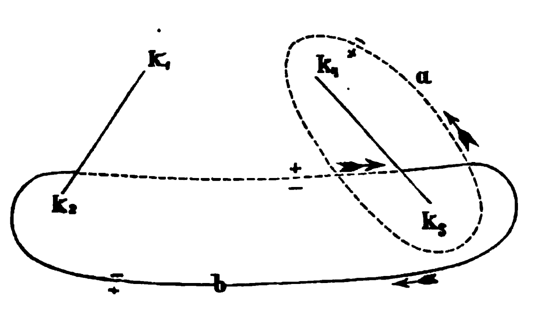
Die Untersuchung eines Bereiches vom Geschlecht Eins läuft der Untersuchung der doppelt periodischen Functionen gewissermassen parallel und ist zur genaueren Kenntniss der letzteren unerlässlich. Dabei kann man sich auf einen solchen algebraischen Bereich beschränken, in welchem die eine Grundfunction eine nur zweiwerthige algebraische Function der andern ist.

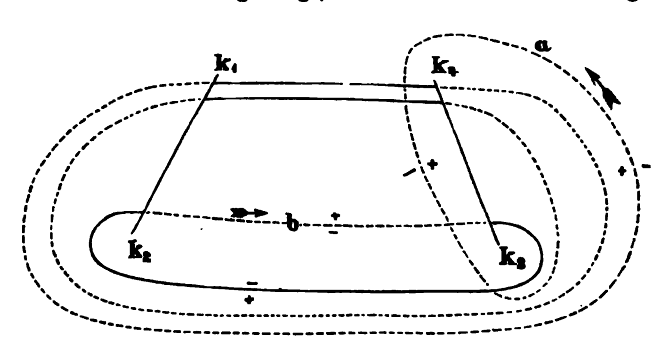
Wenn wir nun als algebraische Grundgrössen s, z solche wählen, in denen s von z durch die Gleichung abhängt $$s = \sqrt{(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)(z-k_4)},$$ so könnte es als nicht sachgemäss erscheinen, dass die z adjungirte algebraische Grösse s von vier Parametern k_1, k_2, k_3, k_4 abhängig gemacht ist, während man doch durch die Beziehung
$$t = -\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \quad r = (\gamma z+\delta)^2 s; \quad z = -\frac{\delta t+\beta}{\gamma t+\alpha}, \quad s = (\gamma t+\alpha)^2 r$$
durch passende Wahl von α, β, γ, δ einen congruenten Bereich r, t herstellen kann, in welchem die t adjungirte Irrationalität r nur von einem Parameter abhängt, welche Transformation des Bereiches übrigens uns später beschäftigen wird. Da es jedoch nützlich ist, die z adjungirte Irrationalität bald in der Form $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ anzunehmen, bald in der Form $\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}$, welche beide als specielle Fälle in der Allgemeinen $\sqrt{(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)(z-k_4)}$ enthalten sind, und da für einen grossen Theil der Untersuchung das Eingehen von vier Parametern in dieselbe durchaus keine Complication mit sich bringt, so betrachten wir zunächst den Bereich s, z, worin
$$s = \sqrt{(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)(z-k_4)}$$
ist, wobei die k als von einander verschieden gedacht werden. Soll ein k, z. B. k_4, über alle Grenzen wachsen, so muss man s durch $s:\sqrt{-k_4}$ ersetzen. Dadurch, dass man s einen constanten Factor giebt, wird der Bereich offenbar nicht geändert.

§ 77. Die zum Bereiche s, z gehörende Riemann'sche Fläche. Riemann'sche Flächen haben wir bereits in den Paragraphen 58 und 64 kennen gelernt, die hier zu Grunde zu legende unterscheidet sich nur in geringer Weise von den frühern. Wir legen zwei Ebenen (Blätter) auf die z-Ebene, schneiden jede derselben zuerst zwischen den über k_1 und k_2 liegenden Punkten dieser Ebenen durch congruente knotenlose, am einfachsten gerade Linien auf und lassen die entgegengesetzten Ufer dieser Linien im oberen und unteren Blatte zusammenwachsen, so dass diese Linien Durchsetzungslinien werden, deren Charakter uns aus § 58 schon bekannt ist. In ähnlicher Weise schneiden wir die Blätter über k_3 und k_4 längs einer knotenlosen, die frühere Durchsetzungslinie nicht treffenden Linie auf und lassen die Blätter längs der gegenüberliegenden Ufer dieser Linie zusammenwachsen, so dass eine neue Durchsetzungslinie entsteht. Es ist immer möglich, die Indices 1, 2, 3, 4 so zu wählen, dass, wenn beide Durchsetzungslinien gerade Linien sein sollen, sich diese nicht schneiden, was übrigens nicht durchaus abzuweisen, aber weniger einfach wäre. Verschiebt man die Durchsetzungslinien, die geraden in krumme übergehen lassend, aber immer die Endpunkte festhaltend, so hat dies auf die Fläche selbst keinen Einfluss, nur auf die Zählung ihrer Blätter, indem durch eine solche Operation ein Stück aus dem oberen ins untere Blatt versetzt wird, dafür ein congruentes Stück ins obere Blatt. (Man vergl. den Schluss des § 17.) Wir werden hier die Durchsetzungslinien in der Regel als gerade denken.

Die zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit den Durchsetzungslinien $\overline{k_1k_2}$, $\overline{k_3k_4}$ werde mit T bezeichnet. Verschiebt man die Windungspunkte k_1, k_2, k_3, k_4 mit ihren Durchsetzungslinien, bis k_1, k_2 bez. mit -1, $-1:k$ (k positiv reell und kleiner als Eins) zusammenfallen, k_3, k_4 bez. mit 1, $1:k$, so ist

dies, wie intuitiv klar ist, eine solche Deformation der Fläche, wie sie in § 2 besprochen wurde, welche die Verhältnisse des **Zusammenhängens** unverändert lässt, und da die Fläche mit den Durchsetzungslinien —1, —1 : k als dreifach zusammenhängende im § 58 erkannt wurde, als eine solche, die sich ein-eindeutig auf die Oberfläche eines körperlichen einfachen Ringes beziehen lasse, so ist dies auch mit der hier definirten Fläche T der Fall, und sie wird durch **ein** Paar von nicht zerstückelnden Querschnitten in eine einfach zusammenhängende T' zerlegt, wie dieses Paar auch gewählt werden möge. Aus diesem Grunde sagt man, sie sei vom Geschlecht **Eins**, und dehnt dieses Epitheton auf die in T eindeutigen Functionen aus. Zieht man also zuerst einen T nicht zerstückelnden Querschnitt (genauer Rückkehrschnitt) a, der in nebenstehender Zeichnung im unteren Blatte gedacht und deshalb punktirt gegeben ist, und bezeichnet das Ufer, welches bei der Zugrichtung zur Linken liegt, als das positive, so können wir nun vom positiven Ufer von a anfangend einen zweiten nicht zerstückelnden Querschnitt b zeichnen, der in der Figur anfänglich punktirt ist, dann über die Durchsetzungslinie $\overline{k_3 k_4}$ weg ins obere Blatt geht, und deshalb von da an in der Figur ausgezogen ist, sodann über $\overline{k_1 k_2}$ hinweg wieder ins untere Blatt gelangt, und von da in der Figur wieder als punktirte Linie in a in dem dem Ausgangspunkte auf dem negativen Ufer von a gegenüberliegenden Punkte endet. Der Schnitt a führt vom negativen Ufer von b aufs positive. Dass das Querschnittpaar a, b, welches T in T' verwandelt, die Fläche nicht zerstückelt, erkennt man daraus, dass man von einem Punkte auf einem Ufer dieser Linien zu dem gegenüberliegenden auf dem andern gelangen kann, ohne T' zu verlassen, indem man den einen Punkt immer längs der beiden Querschnitte, ohne sie zu überschreiten, fortführt. Die beiden Ufer derselben bilden zusammen **einen** einzigen continuirlichen Zug. Obenstehende (zweite) Figur zeigt, wie man das Querschnittpaar auch anders wählen könnte; es lässt sich auf unendlich viele verschiedene Weisen ziehen, aber immer ist es **ein** Paar, welches T in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, weil diese Eigenschaft dem körperlichen Ringe zukommt. Dieser Eigenschaft entspricht in der Theorie der doppelt periodischen Functionen die Thatsache, dass ein Elementarparallelogramm auf unendlich viele verschiedene Arten gewählt werden kann.





§ 78. **Die Functionen des Bereiches s, z sind in T einwerthig.** Dass wir unter einwerthigen Functionen solche, welche nicht in einzelnen Punkten von T, wie $\sin z$ im Unendlichen, unendlich vieldeutig sind, also Functionen verstehen, die nirgend eine sogenannte wesentlich singuläre Stelle haben, darauf machen wir hier noch einmal besonders aufmerksam. — Die Function s und jede rationale Function von s und z ist in T einwerthig, oder ist, wie man sagt, wie T verzweigt, und umgekehrt: jede wie T verzweigte oder in T einwerthige Function gehört dem Bereiche s, z an, ist eine rationale Function von s und z. Eine solche Function kann nicht in unendlich vielen Punkten unendlich gross werden; diese Punkte Unendlich müssten eine Grenzstelle besitzen, und die Function müsste dort eine wesentlich singuläre Stelle haben. Sie wird also nur in einzelnen Punkten unendlich gross in endlicher Ordnung werden. Während aber die einwerthigen Functionen der z-Ebene, die rationalen Functionen von z, immer nur ganze Ordnungen des Unendlichwerdens und Verschwindens zulassen, ist dies mit den rationalen Functionen von s und z anders. Die Function $1 : s$ wird in den über k_1, k_2, k_3, k_4 liegenden Punkten

der Fläche unendlich gross in der $\frac{1}{2}$-ten Ordnung, indessen werden wir eine solche Zählung der Ordnungen in T einführen, dass auch diese Ordnungen ganze sind.

Die Function $\sqrt{z-k_\mu} = e^{\frac{1}{2}lg(z-k_\mu)}$ hat in der z-Ebene, abgesehen von zwei speciellen Punkten, überall zwei Werthe, denn alle ihre Werthe für ein gegebenes z sind in der Form enthalten

$$e^{\frac{1}{2}(lg(z-k_\mu)+2ni\pi)} = e^{\frac{1}{2}lg(z-k_\mu)+ni\pi} = (-1)^n e^{\frac{1}{2}lg(z-k_\mu)} = (-1)^n\sqrt{z-k_\mu},$$

wo n eine ganze positive oder negative Zahl, und $\sqrt{z-k_\mu}$ einer der möglichen Werthe ist. Die Verzweigung des Logarithmus ist bekannt. Aendert man z stetig, diese Grösse von einem Anfangswerthe oder Anfangspunkte längs eines beliebigen Weges, der nur den Punkt $z=k_\mu$ nicht trifft, in der Ebene zu jener Anfangslage zurückführend, so hat sich dabei $lg(z-k_\mu)$ um $2ni\pi$ vermehrt, wenn dieser Weg die Stelle k_μ n-mal umkreist, wo n positiv ist, wenn der Punkt in positiver Richtung umkreist ist, und wo n negativ ist, wenn die Umkreisungen negative waren. Es geht also $\sqrt{z-k_\mu}$ in seinen negativen oder entgegengesetzten Werth über, wenn z stetig auf einem Wege abgeändert wird, der k_μ eine ungerade Anzahl von Malen, gleichviel in welcher Richtung, umkreist, dessen scheinbare Grösse von k_μ aus gesehen ein ungerades Multiplum von 2π ist, und $\sqrt{z-k_\mu}$ bleibt ungeändert, wenn die Zahl der Umkreisungen gerade ist.

Das Product vier solcher Wurzeln, die Function

$$s=\sqrt{(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)(z-k_4)} = e^{\frac{1}{2}lg(z-k_1)+\frac{1}{2}lg(z-k_2)+\frac{1}{2}lg(z-k_3)+\frac{1}{2}lg(z-k_4)}$$

bleibt ungeändert, wenn man z auf einem Wege zu seinem Anfangspunkte zurückführt, sobald die Summe der Umkreisungen dieses Weges um jeden einzelnen der Punkte $k_1 \dots k_4$ gerade ist, und geht in seinen negativen, seinen entgegengesetzten Werth über, wenn diese Summe ungerade ist.

Legen wir aber statt der z-Ebene zur Repräsentation der Werthepaare s, z die Riemann'sche Fläche T zu Grunde, wie sie im § 77 beschrieben ist, so ist ersichtlich, dass, wenn der Werth von s in einem über einem bestimmten Punkt der z-Ebene liegenden Punkte eines bestimmten Blattes gegeben ist, und wenn man z stetig in der z-Ebene, über der T liegt, herumführt und s stetig mit dieser Grösse ändert, auf einem Wege, der in die Anfangslage von z in der z-Ebene zurückkehrt, — so ist ersichtlich, dass der darüber liegende Punkt der Riemann'schen Fläche ebenfalls zu seiner Anfangslage in demselben Blatte zurückkehren wird, wenn der Weg die Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 zusammen eine gerade Anzahl von Malen umkreist, dass er aber seine Endlage im correspondirenden Punkte des andern Blattes finden wird, dass er also nicht in seine Anfangslage zurückkehren wird, wenn der Weg die Punkte k_1 bis k_4 zusammen eine ungerade Anzahl von Malen umkreist. Man wird also diesem zweiten Punkte, der über demselben z liegt als der erste, den zweiten Werth von s zuweisen können. — Einen strikten Durchgang eines Weges durch einen der Punkte k muss man vermeiden.

Wird demnach einem beliebigen Punkte über der z-Ebene erstens in jedem Blatte von T eben jener Werth von z, zweitens in einem der beiden Blätter einer der beiden möglichen Werthe von s zugewiesen, so ist dieser Punkt Repräsentant eines Werthepaares s, z. Aendert man nun den Ort dieses Punktes stetig so, dass er stets in demselben Blatte bleibt, aber auf beliebigem Wege, so erhält s, wenn diese Grösse mit z zugleich stetig geändert wird, in jedem Punkte dieses Blattes einen völlig bestimmten Werth. Denn wenn auch z auf verschiedenen Wegen von einem Platze zu einem andern geführt wird, so müssen doch zwei solche Wege, wenn diese immer in demselben Blatte bleiben, oder auch wenn sie ins zweite Blatt führen, aber zuletzt ins erste zurückkehren, die Windungspunkte k_1 bis k_4 stets eine gerade Anzahl von Malen umkreisen, und den Punkten dieses Blattes entspricht daher ein bestimmtes System von Werthen s, welches man einen Zweig der Function s oder des Bereiches s, z nennt. Stetig ist ein solcher Zweig in der z-Ebene nicht, denn in Punkten, die auf verschiedenen Ufern einer Durchsetzungslinie einander gegenüber liegen, hat s entgegengesetzte, also um eine endliche Grösse von einander verschiedene Werthe. Setzt man aber, z über die Durchsetzungslinie in das zweite Blatt führend, s stetig bis zu einem bestimmten Punkte fort, so hat dort s einen von dem Werthe im correspondirenden Punkte des ersten Blattes verschiedenen, nämlich entgegengesetzten Werth. Führt man dann den Punkt z im zweiten Blatte herum zu jedem Punkte desselben, so hat dort s wieder stets

einen völlig bestimmten Werth, und alle Werthe bilden ein System von Werthen, welche den zweiten Zweig von s oder des Bereiches s, z constituiren. Jetzt ist die Function s oder der Bereich s, z, oder es sind die beiden Zweige von s völlig eindeutig auf die Punkte von T bezogen, so dass jedem Punkte von T ein Werthepaar s, z, und umgekehrt jedem Werthepaare s, z ein Punkt von T entspricht. In den Punkten k_1, k_2, k_3, k_4 sind die Zweigwerthe von s nicht von einander verschieden, es entspricht ihnen aber auch nur ein Punkt von T. Geht man um einen dieser Punkte herum, so geht ein Zweigwerth von s in den andern über, weshalb diese Punkte Verzweigungspunkte (oder Windungspunkte) von T heissen, und die Werthe k_1, k_2, k_3, k_4 Verzweigungswerthe. Ueber die Durchsetzungslinien setzen sich die Zweige stetig in einander fort, die Zweige oder Blätter der Fläche sowohl, als die der Function s.

§ 79. Darstellung der Functionen des Bereiches s, z. Dass jede rationale Function von s und z in T einwerthig ist, für jeden Punkt von T völlig bestimmt, bedarf keiner Erläuterung. Die rationalen Functionen von z allein haben in übereinander liegenden Punkten gleiche Werthe. Die Darstellung aber einer rationalen Function von s und z ist eine mannigfaltige, und man kann daher darauf bedacht sein, eine möglichst einfache zu wählen. Zunächst wird sich eine solche Function in der Form darbieten

$$f(s,z) = (A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \ldots + A_n s^n) : (B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \ldots + B_m s^m),$$

worin die A und B ganze (rationale) Functionen von z sind. Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $B_0 - B_1 s + B_2 s^2 - B_3 s^3 + \ldots + (-1)^m B_m s^m$, und ordnet dann wieder Zähler und Nenner nach Potenzen von s, so enthält der Nenner nur noch gerade Potenzen von s, und diese sind sämmtlich ganze Functionen von z. Der Nenner ist demnach eine ganze Function von z nach dieser Operation. Wird sie mit $G_3(z)$ bezeichnet, so gewinnen wir die Form

$$f(s,z) = \{(C_0 + C_2 s^2 + C_4 s^4 + \ldots + C_{2\nu} s^{2\nu}) + s(C_1 + C_3 s^2 + \ldots + C_{2\mu+1} s^{2\mu})\} : G_3(z).$$

Ersetzt man wieder im Zähler die geraden Potenzen von s durch ganze Functionen in z, so erhält man die Form $$f(s,z) = (G_1(z) + s\,G_2(z)) : G_3(z) = R_1(z) + s R_2(z),$$
worin G_1, G_2 ganze Functionen von z, und R_1, R_2 rationale Functionen von z sind. — In vielen Fällen ist es zweckmässig, dieser Function die Form zu geben

$$f(s,z) = R_1(z) + \frac{s^2 R^2(z)}{s},$$

worin $s^2 R_2(z)$ nun ebenfalls eine rationale Function von z ist, und ausserdem werden die rationalen Functionen oft noch durch Partialbruchzerlegung in eine Summe speciellerer Functionen zerlegt, doch davon später.

§ 80. Die wie T verzweigten Functionen sind Functionen des Bereiches s, z. Die rationalen Functionen des Bereiches s, z sind als eindeutige Functionen in der Fläche T erkannt worden. Aber auch der umgekehrte Satz ist richtig: die in T einwerthigen analytischen Functionen sind rationale Functionen von s und z. Dabei ist allerdings zuerst festzustellen, was unter einer analytischen Function in T zu verstehen sei. In der Umgebung eines Punktes s_0, z_0 in T, der von k_1, k_2, k_3, k_4 verschieden ist, der aber auch ein unendlich ferner sein kann, ist der Begriff der analytischen Function derselbe, als der einer analytischen Function von z allein. Es kommt eben nur ein Theil von T in Betracht, der ein ebener ist, und dies gilt für Punkte in jeder beliebigen Nähe der Verzweigungsstellen. Betrachten wir aber ein Gebiet, welches die Umgebung eines Verzweigungspunktes k_μ bildet, so bedeckt dasselbe die Ebene doppelt. In diesem Gebiete ist z, aber auch $\sqrt{z - k_\mu}$ einwerthig, und es ist auch jede Function von der Form

$$R_1(z) + R_2(z)\sqrt{z - k_\mu}$$

einwerthig, wenn R_1, R_2 Functionen sind, die in der Umgebung von k_μ den Charakter rationaler Functionen von z haben, und die Function ist eine analytische im gewöhnlichen Sinne bis in jede beliebige Nähe von k_μ. Deshalb wollen wir eine Function von obiger Form oder, was dasselbe ist, eine Function, die sich in eine

Reihe entwickeln lässt, welche nach ganzen Potenzen von $\sqrt{z-k\mu}$ fortschreitet und mit einer bestimmten positiven oder negativen Potenz beginnt, eine analytische Function im Punkte $k\mu$ nennen. Ist die Anfangspotenz die $-n^{te}$, also $\sqrt{(z-k\mu)^{-n}}=(z-k\mu)^{-\frac{1}{2}n}$, wo n eine ganze Zahl ist, so sagen wir, die Function habe dort einen n-fachen Pol, oder sie werde unendlich gross in der n^{ten} Ordnung in T, für welchen Sprachgebrauch noch weitere Gründe beigebracht werden sollen.

Ist f eine in T einwerthige Function, und sind die Werthe derselben in correspondirenden Punkten der beiden Blätter von T f_1 und f_2, so ist f_1+f_2 sowohl, als auch $f_1 . f_2$ eine in der z-Ebene überall einwerthige analytische Function. Für jeden Werth von z, der kein Verzweigungswerth ist, ist dies selbstverständlich. In der Umgebung der Verzweigungsstelle ist aber $f=R_1(z)+\sqrt{(z-k\mu)}R_2(z)$, und folglich
$$f_1+f_2=2R_1(z),\quad f_1 . f_2=R_1^2(z)-(z-k\mu)R_2^2(z)=R_3(z),$$
wo R_1 und R_3 den Charakter rationaler Functionen haben, also sind diese Ausdrücke auch dort einwerthige Functionen von z. Nach § 24 sind deshalb $f_1+f_2=2L(z)$, $f_1 . f_2=M(z)$ rationale Functionen von z, und es genügen f_1, f_2 oder es genügt f der quadratischen Gleichung
$$f^2-2Lf+M=0,\quad f=L+\sqrt{(L^2-M)},$$
wobei jedem Punkte von T wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit ein bestimmtes Vorzeichen der Quadratwurzel zugehört.

Ist $L^2-M=P(z):Q(z)$, wo P und Q keinen gemeinsamen Theiler mehr haben, so kann man schreiben: $f . Q=LQ+\sqrt{PQ}=LQ+\sqrt{(G . S^2)}=LQ+S\sqrt{G}$, wo G nur noch einfache Factoren enthält, also gleich $(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)\ldots.$ gesetzt werden kann.

Es ist nun zunächst ersichtlich, dass von den Werthen a, b, c, d . . . keiner von k_1, k_2, k_3, k_4 verschieden sein kann, und dass also $G(z)$ höchstens vom vierten Grade ist. Denn führt man z in T um a herum, so wechselt $\sqrt{G}$ sein Vorzeichen, f geht von einem Werthe in einen andern über. Ist aber a kein Verzweigungspunkt, so verbleibt der Träger von z in demselben Blatte, es würde also f in demselben Blatte zwei verschiedene Werthe annehmen, was gegen die Voraussetzung ist.

Andrerseits kann aber auch keiner der Factoren $z-k_1$, $z-k_2$, $z-k_3$, $z-k_4$ in G fehlen, wofern nicht G constant ist, also wofern nicht f selbst eine rationale Function von z ist. Denn führt man z, von z_0 anfangend, einmal um einen Verzweigungspunkt $k\mu$ herum, für welchen ein entsprechender Factor $z-k\mu$ in G vorhanden ist, ein andermal um einen $k\nu$ herum, für welchen in G ein entsprechender Factor nicht vorhanden ist, so erhielte man für einen Punkt in T einmal einen bestimmten Werth von f, das andere mal einen andern, weil sich einmal das Vorzeichen von $\sqrt{G}$ ändert, das andere mal nicht ändert. Mithin ist $\sqrt{G}=s$, und f ist eine rationale Function von s und z, was zu erweisen war. — Sind die Werthe von f in übereinander liegenden Punkten von T dieselben, so ist f selbst eine einwerthige, also rationale Function von z.

§ 81. **Eine in T einwerthige Function oder eine Function des Bereiches s, z nimmt jeden Werth gleich oft an.** Es giebt mehrere Sätze über die rationalen Functionen von s und z, welche den Liouville'schen Sätzen über doppelt periodische Functionen völlig entsprechen, z. B. der an der Spitze dieses Paragraphen stehende. Die Function f von s und z genügt einer Gleichung von der Form $G(z)f^2-2G_1(z)f+G_2(z)=0$, wo G, G_1, G_2 ganze Functionen von z sind. Ordnet man nach Potenzen von z, so erhält man, wenn z^m die höchste in den Functionen G vorkommende Potenz ist, die Form
$$z^m A_m(f)+z^{m-1}A_{m-1}(f)+\ldots+zA_1(f)+A_0(f)=0,$$
worin die $A_0, A_1 \ldots A_m$ ganze Functionen von f höchstens vom zweiten Grade sind. Für jeden gegebenen Werth von f hat z, allgemein zu reden, m verschiedene Werthe. Es ist also $f=f_0$ für m Werthe von z, etwa für z_0, $z_0^{(1)}$, $z_0^{(2)}$, . . ., $z_0^{(m-1)}$. Hierzu gehören m Punkte von T, weil im Allgemeinen in übereinander liegenden Punkten von T f nicht gleichzeitig gleich f_0 ist. Hat aber die Gleichung für $f=f_0$ eine doppelte Wurzel, enthält sie den Factor $(z-z_0)^2$, so ist entweder die Function in übereinander liegenden Punkten von T gleich f_0, oder wenn dies nicht der Fall ist, so müssen wir sagen, um unseren Satz aufrecht zu erhalten, f nimmt dort den Werth f_0 zweimal an. Erniedrigt sich der

Grad der Gleichung für specielle Werthe von f_0, so entsprechen diesen Werthen unendlich ferne Punkte in T.

Wir wollen jedoch die Untersuchung unseres Satzes genauer noch in anderer Weise führen. Es ist
$$f = (F(z) + G(z)s) : H(z),$$
worin F, G, H ganze Functionen von z sind. Wir fragen nun, wie oft nimmt f den Werth f_0 an, oder wie oft verschwindet der Ausdruck
$$f - f_0 = (F(z) - H(z)f_0 + G(z)s) : H(z) = (I(z) + s\,G(z)) : H(z).$$
Dies könnte geschehen für $z = \infty$. Wäre $I = F - Hf_0$ vom μ^{ten} Grade, G vom $\nu - 2^{\text{ten}}$ Grade und H vom ϱ^{ten} Grade, so würde $f - f_0$, wenn ϱ um λ Einheiten grösser als die grössere der beiden Zahlen μ, ν ist, in den beiden unendlich fernen Punkten von T λ-mal, also zusammen 2λ-mal verschwinden. Ist μ von ν verschieden, so wird sicher der Zähler in den beiden unendlich fernen Punkten unendlich gross in der μ bez. ν Ordnung, je nachdem $\mu > \nu$ oder $\nu > \mu$ ist, und $f - f_0$ wird nicht in einem der beiden unendlich fernen Punkte noch einmal unendlich klein, sondern verschwindet nur noch da, wo der Zähler Null wird. Hierzu ist nothwendig, dass
$$\Phi(z) = (I(z) + s\,G(z))(I(z) - s\,G(z)) = I^2(z) - G^2(z)(z - k_1)(z - k_2)(z - k_3)(z - k_4)$$
gleich Null werde, was 2μ- bez. 2ν-mal statthat, und es kann diese Zahl nicht durch Fortheben der höchsten Potenzen erniedrigt werden, weil μ von ν verschieden ist. Aber doppelte Werthe können vorkommen, und zwar entweder dadurch, dass I und G einen gemeinsamen Factor haben, in welchem Falle $f - f_0$ in übereinander liegenden Punkten von T verschwindet, oder aber diese Functionen haben keinen gemeinsamen Factor, dann darf, wenn $z = z_0$ jene Nullstelle ist, weder I noch G den Factor $z - z_0$ haben, und es kann von den beiden Formen $I(z_0) + s_0\,G(z_0)$, $I(z_0) - s_0\,G(z_0)$ nur eine verschwinden, weil ihre Summe nicht Null ist. Demnach verschwindet der Zähler von $f - f_0$ nur in einem der beiden correspondirenden Punkte von T, und zwar so oft, als $\Phi(z)$ an der Stelle z_0 verschwindet.

Fällt aber ein Werth z_0, für welchen $f - f_0$ verschwindet, auf einen Verzweigungspunkt k_μ, so muss $I(z) = F(z) - H(z)f_0$ den Factor $z - k_\mu$ haben, und der Zähler hat die Form $(z - k_\mu)I_1(z) + s\,G(z)$. Die Function $f - f_0$ nimmt dann den Werth Null für $z = k_\mu$ einmal an, wenn $G(z)$ den Factor $z - k_\mu$ nicht hat, und es hat auch $\Phi(z)$ den Factor $z - k_\mu$ nur einmal. Der an der Spitze dieses Paragraphen stehende Satz würde nicht aufrecht zu erhalten sein, wenn man nicht $\sqrt{z - k_\mu}$, sondern $z - k_\mu$ als unendlich klein erster Ordnung in T ansehen wollte.

Haben aber $I = F - f_0 H$ und $z^2 G(z)$ denselben Grad, ist $\mu = \nu$, so wird $\Phi(z)$ im Allgemeinen wieder vom $2\mu^{\text{ten}}$ Grade sein, und es giebt 2μ Nullstellen des Zählers von $f - f_0$. Werden die beiden Factoren $I + sG$, $I - sG$ für $z = \infty$ nicht unendlich gross in der μ^{ten}, sondern in der $\mu - \delta^{\text{ten}}$ Ordnung, so muss auch ihre Summe in derselben Ordnung unendlich gross werden, und es muss $I(z)$ vom $\mu - \delta^{\text{ten}}$ Grade sein, gegen die Voraussetzung. Es können also die beiden Factoren nicht zugleich in einer niedern als der μ^{ten} Ordnung unendlich gross werden. Wenn demnach sich in $\Phi(z)$ die δ höchsten Potenzen fortheben, wenn Φ vom $(\mu - \delta)^{\text{ten}}$ Grade ist, so muss einer der beiden Factoren in der $(\mu - \delta)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich gross werden, während der andere in der μ^{ten} Ordnung unendlich gross wird, und es verschwindet dann $f - f_0$ erstens λ-mal in beiden unendlich fernen Punkten und noch δ-mal in einem derselben, zusammen $2\lambda + \delta$-mal im Unendlichen.

Nun mag es noch ε-mal geschehen, dass $I + sG = F - f_0 H + sG$ mit H zugleich verschwindet, so sind die Nullstellen von f_0 unabhängig, weil in diesen Fällen $F + sG$ auch verschwinden muss. Die Nullstellen der Function $f - f_0$ sind also die 2μ bez. 2ν von Φ und die 2λ unendlich fernen, die zusammen jedesmal 2ϱ ausmachen, oder wenn $\mu = \nu$ ist, die $2\mu - \delta$ Nullstellen von Φ vermehrt um die $2\lambda + \delta$ unendlich fernen, was wiederum 2ϱ giebt, wovon ε etwa gemeinsame, von f_0 unabhängige gleichzeitige Nullstellen des Zählers und Nenners abgehen, so dass zusammen $f - f_0$
$$2\varrho - \varepsilon\text{-mal}$$
verschwindet, welche Zahl von f_0 gänzlich unabhängig ist, oder es nimmt f den Werth f_0, welcher dieser auch sein mag, $2\varrho - \varepsilon$-mal an, und es nimmt f jeden Werth gleich oft an, w. z. b. w.

Ist $f_0 = \infty$, so würde die Betrachtung dadurch zu modificiren sein, dass man die Function $1:f$ untersuchte, welche Function jeden andern Werth ebenso oft annimmt, als den Werth Null. Es wird demnach f ebenso oft unendlich gross, als es einen anderen Werth annimmt. Verschwindet $f - f_0$ gleichzeitig in übereinander liegenden Punkten von T, so müssen $I + sG$, $I - sG$ zugleich, und es müssen daher zugleich auch ihre Summe und Differenz verschwinden, woraus folgt, dass $F - Hf_0$ und G einen gemeinsamen linearen Factor so oft haben müssen, als die Ordnung des gleichzeitigen Verschwindens angiebt. $\Phi(z)$ verschwindet dort in der doppelten Zahl dieser Ordnung, und unser Beweis erfordert keine Abänderung für diesen Fall. — Mit diesem Paragraphen vergleiche man § 36.

§ 82. **Im Bereiche s, z giebt es keine Function, die nur einmal unendlich gros würde.** So wie eine doppelt periodische Function nach den Liouville'schen Sätzen nicht existirt, die nur einen einfachen Pol im Elementarparallelogramm besitzt, so giebt es auch in T keine einwerthige Function, die nur einmal unendlich gross würde oder jeden Werth nur einmal annehme. Soll $f(z) = (F(z) + s\,G(z)) : H(z)$ für $z = z_0$ weder in dem einen noch in dem andern Blatte unendlich gross werden, obschon die ganze Function H den Factor $z - z_0$ besitzt, so muss sowohl $F(z_0) + s_0\,G(z_0)$, als auch $F(z_0) - s_0\,G(z_0)$ Null sein, woraus durch Addition und Subtraction folgt, dass $F(z_0)$ und $G(z_0)$ Null sein müssen, und dass also die ganzen Functionen F und G ebenfalls den Factor $z - z_0$ besitzen müssen. Wenn demnach in der Darstellung von f die ganzen Functionen F, G, H von gemeinsamen Factoren befreit sind, so wird f sicher (wenigstens in einem der beiden Blätter) da unendlich gross, wo der Nenner H verschwindet. Fällt dieser Punkt z_0 auf eine Verzweigungsstelle k_μ, so muss $F(z)$ den Factor $(z - k_\mu)$ haben, und es wird dann, wenn F, G, H keinen gemeinsamen Factor haben, $sG : (z - k_\mu)$, und also $f(s, z)$ in jenem Punkte unendlich gross erster Ordnung. Soll f nur in einem unendlich fernen Punkte unendlich gross werden, so muss folglich der Nenner H constant sein. Auf diesen Fall können wir uns aber beschränken. Denn wenn eine Function $f_0(s, z)$ existirt, welche nur für $s = s_0$, $z = z_0$ unendlich gross erster Ordnung wird, so nimmt diese Function in den beiden unendlich fernen Punkten, weil sie jeden Werth nur einmal annimmt, verschiedene Werthe an, deren einer $f_0^{(0)}$ sei. Alsdann wird die Function $f = 1 : (f_0(s, z) - f_0^{(0)})$ nur in einem unendlich fernen Punkte unendlich gross erster Ordnung, es existirt also unter dieser Voraussetzung auch eine Function von s und z, die nur in einem unendlich fernen Punkte unendlich gross erster Ordnung wird, und hat die Form $f(s, z) = F(z) + s\,G(z)$, wo F und G ganze Functionen sind. Man beachte, dass $lim(s : z^2)$ für $z = \infty$ entgegengesetzte Werthe hat. Ist $F(z)$ vom μ^{ten} Grade, $\mu > 1$, so kann

$$\frac{F(z)}{z^\mu} + \frac{s}{z^2} \cdot \frac{G(z)}{z^{\mu-2}}$$

nicht in beiden unendlich fernen Punkten verschwinden, weil sonst auch die Summe der Werthe

$$\frac{F(z)}{z^\mu} + \frac{s}{z^2}\,\frac{G(z)}{z^{\mu-2}} + \frac{F(z)}{z^\mu} - \frac{s}{z^\mu}\,\frac{G(z)}{z^{\mu-2}} = \frac{2F(z)}{z^\mu}$$

verschwinden müsste, was nicht möglich ist, wenn F vom μ^{ten} Grade ist. Folglich wird f wenigstens in einem der beiden unendlich fernen Punkte in der μ^{ten} Ordnung, die grösser als die erste ist, unendlich gross; in solcher Form existirt also keine Function, die nur einmal, d. h. in einem Punkte, unendlich gross erster Ordnung würde. Ist aber $F(z)$ vom ersten Grade, und soll $(F(z) : z) + (s\,G(z) : z)$ in einem der unendlich fernen Punkte verschwinden, so muss $G(z)$ Null sein, weil eben $s : z$ in beiden unendlich fernen Punkten unendlich gross wird. Und so müsste f die Form haben $f = F(z)$. Diese Function wird aber in beiden unendlich fernen Punkten unendlich gross. Es existirt demnach auch in dieser Form keine Function, die nur in einem unendlich fernen Punkte, und es existirt demnach überhaupt keine rationale Function von s und z, die nur einmal unendlich gross erster Ordnung würde, was zu beweisen war.

Der Fall $f = (z - z_0) : (z - k_\mu)$ ist nicht als Ausnahme anzusehen, weil diese Function nach unsern Definitionen eben im Punkte k_μ unendlich gross zweiter Ordnung wird.

§ 83. **Darstellung einer Function mit zwei einfachen Polen.** Es gelingt hingegen leicht, eine Function zu construiren, die in zwei willkürlich gegebenen Punkten $z = \alpha$, $s = s_\alpha$; $z = \beta$, $s = s_\beta$ unendlich gross erster Ordnung wird, und in zwei Punkten verschwindet, von denen der eine $z = a$, $s = s_a$ willkürlich gegeben werden kann. Wir nennen eine solche Function eine Function zweiter Ordnung von s und z. Ihre Darstellung findet sie in der Form

$$f = \begin{vmatrix} 1, & z, & z^2, & s \\ 1, & a, & a^2, & s_a \\ 1, & \alpha, & \alpha^2, & -s_\alpha \\ 1, & \beta, & \beta^2, & -s_\beta \end{vmatrix} : (z-\alpha)(z-\beta),$$

und da das Residuum von f in den Polen, oder $\lim(z-\alpha)f$, $\lim(z-\beta)f$, für $z = \alpha$ bez. $z = \beta$ gleich $2s_\alpha(\beta-a)(\alpha-a)$ bez. $-2s_\beta(\beta-a)(\alpha-a)$ ist, so erkennt man sogleich, dass die Determinante des Zählers nicht identisch verschwindet. Man kann aber auch f als lineare Function einer speciellen derartigen Function ausdrücken, sie in die Form setzen

$$f = c\,\frac{s(\beta-\alpha)+s_\alpha(\beta-z)+s_\beta(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)} + c',$$

worin der Factor von c für die oben gegebenen Pole unendlich gross wird, und es lässt sich $c:c'$ so einrichten, dass f ebenfalls im Punkte $z = a$, $s = s_a$ verschwindet.

Liegen die beiden Punkte Unendlich übereinander, so ist in $f = (A+Bz+Cz^2+Ds):(z-\alpha)^2$ der Zähler so einzurichten, dass er in den beiden über α liegenden Punkten verschwindet, was nach vorigem Paragraph nur möglich ist, wenn der mit s multiplicirte und ebenso der von s freie Theil den Factor $z-\alpha$ hat, so dass also D Null sein, und die Function in der Form $(A+Bz):(z-\alpha)$ enthalten sein muss. Eine Function, die nur in zwei übereinander liegenden Punkten unendlich gross wird, verschwindet auch in zwei übereinander liegenden Punkten, die die unendlich fernen sind, wenn $B = 0$ ist.

Fallen die beiden Punkte Unendlich in einen zusammen, so ist

$$f = c\,\frac{s+s_\alpha+(z-\alpha)s'_\alpha}{(z-\alpha)^2} + c',$$

wo s'_α den Werth des Differentialquotienten $ds:dz$ für $z = \alpha$ bedeutet. Das erste bez. zweite Residuum dieser Function in ihrem Pol ist $2cs'_\alpha$ und $2cs_\alpha$. Man kann diese Function auch als Product zweier Functionen darstellen, von dessen Factoren der eine die Pole s_α, α; s_β, β, der andere die Pole s_α, α; s_γ, γ besitzt, während die erste den Punkt s_γ, γ zu einem Nullpunkt, die zweite den Punkt s_β, β zu einem Nullpunkt hat.

Da eine Function von s und z mindestens zweiter Ordnung ist, jeden Werth mindestens zweimal annimmt, also, wenn sie zweimal unendlich gross wird, auch zweimal verschwindet, so wird der Logarithmus einer Function von s und z mindestens viermal (logarithmisch) unendlich gross.

Die Residuen der Function f in ihren beiden Polen sind nicht von einander unabhängig. Dividirt man f durch s und rechnet die Windungspunkte (wenn α oder β nicht auf sie fallen) nicht zu den Polen, so ist die Summe der Residuen in ihren Polen Null, sie haben entgegengesetzt gleiche Werthe, und wenn f nur in einem Punkte unendlich gross zweiter Ordnung wird, so ist das erste Residuum von $f:s$ in diesem Punkte Null. Vergl. § 34.

Durch ihre beiden Pole und deren Residuen oder vielmehr, da diese nicht unabhängig von einander sind, durch eines ihrer Residuen ist eine Function zweiter Ordnung $f(s,z)$ bis auf eine additive Constante, die willkürlich bleibt, bestimmt. Denn die Differenz zweier solcher Functionen könnte, wenn sie nicht eine Constante wäre, nur einmal unendlich gross werden, was nicht möglich ist.

§ 84. **Functionen n^{ter} Ordnung.** Wird eine Function f des Bereiches s, z in den n Punkten s_α, α; s_β, β; ... s_ν, ν, von denen auch einige zusammenfallen können, unendlich gross erster Ordnung, so können $n-1$ Punkte, für welche sie verschwindet, willkürlich gewählt werden. Multiplicirt man nämlich eine solche Function mit einer Function φ_1 zweiter Ordnung, welche in einem gegebenen Nullpunkte unendlich gross wird und in zwei der gegebenen Punkte Unendlich verschwindet, so ist $f.\varphi_1$

eine Function, die nur noch in $n-1$ Punkten unendlich gross wird, und in $n-2$ gegebenen Punkten verschwindet, die eine Function $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Diese multiplicirt man mit einer Function φ_2, die in einem der gegebenen Nullpunkte unendlich gross wird und in zwei Unendlichkeitspunkten der Function $f\varphi_1$ verschwindet, so ist $f\varphi_1\varphi_2$ eine Function $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. So fährt man fort und bildet nach gleicher Vorschrift die Function $f\varphi_1\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_{n-2}$, die eine Function 2ter Ordnung ist, und die noch in einem der gegebenen Nullpunkte verschwindet und in zwei Punkten unendlich gross wird. Eine solche Function existirt, ihr reciproker Werth sei φ_{n-1}, so ist $f\varphi_1\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_{n-1}$ eine Constante, und die Function Const.: $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_{n-1}$ wird in den vorgeschriebenen Punkten Null und Unendlich. Dabei ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass ein Punkt Null irgend eines Factors mit einem Punkte Unendlich eines andern zusammenfiele, und die Function wäre dann nur von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Dieser Fall wäre als ein solcher anzusehen, bei welchem das Residuum eines Punktes Unendlich Null ist. Verlangt man z. B. eine Function f dritter Ordnung mit den Punkten Unendlich s_α, α; $-s_\alpha, \alpha$; s_β, β und den Punkten Null s_a, a; $-s_a, a$, so würde $f.(z-\alpha):(z-a)$ eine Function erster Ordnung, und da eine solche nicht existirt, eine Constante sein. Das Residuum im Punkte s_β, β ist Null, und die Function ist nur zweiter Ordnung.

Eine Function n^{ter} Ordnung lässt sich, wenn nur einfache oder zweifache Pole vorkommen, als Summe von Functionen zweiter Ordnung darstellen, und sie ist auch in Determinantenform darstellbar. Sie ist aber durch die Punkte Unendlich und $n-1$ Punkte Null bis auf einen constanten Factor, der endlich bleibt, bestimmt. Denn der Quotient zweier Functionen muss eine Function erster Ordnung, und da diese nicht existirt, eine Constante sein. Vergl. § 39.

§ 85. Die Residuen. Eine Function n^{ter} Ordnung von s und z ist durch die Punkte Unendlich und deren Residuen völlig bestimmt, weil die Differenz zweier solcher Functionen überall endlich, also constant ist. Die n Residuen einer Function n^{ter} Ordnung sind jedoch nicht von einander unabhängig. Sind die Pole nur einfach, so wird schon die Differenz zweier Functionen mit denselben Polen und $n-1$ gleichen Residuen constant, weil eine Function erster Ordnung nicht existirt. Durch $n-1$ Residuen ist also das letzte vollständig bestimmt. Bei Functionen zweiter Ordnung ist die Beziehung zwischen den beiden Residuen nach § 83 linear. Stellt sich die Function n^{ter} Ordnung durch eine Summe von Functionen zweiter Ordnung dar, etwa in der Form

$$A + A_1\varphi_1(\alpha,\beta) + A_2\varphi_2(\beta,\gamma) + \ldots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(\mu,\nu),$$

worin s_α, α; s_β, β und s_β, β; $s_\gamma, \gamma \ldots$ bez. die Pole der Functionen φ sind, so erkennt man leicht, dass hier zwischen den Residuen ebenfalls eine homogene lineare Gleichung besteht.

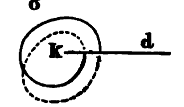
Aber auch zwischen den Residuen einer Function des Bereiches s, z mit höhern Polen besteht eine lineare homogene Relation, worauf wir noch zurückkommen.

§ 86. Der Cauchy'sche Satz für die Fläche T. Wir haben für Functionen f eines Ebenenstückes, gleichviel ob einfach oder mehrfach zusammenhängend, den Satz erwiesen, dass das Integral $\int f dz$ Null sei, wenn es über die ganze Begrenzung des Stückes erstreckt wird, und wenn die Function im Innern des Gebietes analytisch ist, wobei auch Pole zulässig sind, wofern nur ihre ersten Residuen verschwinden. Enthält aber das Stück den unendlich fernen Punkt der Ebene in seinem Innern, so muss dort in der Entwickelung nach Potenzen von z die -1te Potenz fehlen. Es fragt sich nun, ob und wie dieser fruchtbare Satz auf die Riemann'sche Fläche, also auf Functionen des Bereiches s, z ausgedehnt werden kann.

Der Cauchy'sche Satz ist hier so auszusprechen: Bildet ein Linienzug die ganze Begrenzung eines Stückes von T oder auch der gesammten Fläche T, so ist das Integral $\int f(s,z)dz$, über die ganze Begrenzung des Stückes oder der gesammten Fläche T in gleichbleibender Richtung erstreckt, Null, wenn $f(s,z)$ zum Bereiche s, z (eindeutig und analytisch, ohne wesentlich singuläre Stellen) gehört, und wenn in jedem Pole a, auch wenn er auf einen Verzweigungspunkt fällt, in der Entwickelung der Function nach Potenzen von $z-a$ der Entwickelungscoefficient der -1ten Potenz Null ist, also wenn im All-

gemeinen die ersten Residuen, in den Verzweigungspunkten die **zweiten** Residuen Null sind. In den unendlich fernen Punkten der Fläche aber muss in der Entwickelung nach Potenzen von z die -1te Potenz fehlen. Häufiger noch als in der Ebene kommt es in T vor, dass beide Ufer einer Linie als Begrenzung zu achten sind.

Es wird immer vorausgesetzt, dass auf der Begrenzung selbst keine Pole liegen. Schliessen wir zuerst den Fall aus, dass Pole auf Verzweigungspunkte fallen. Dann fügen wir der Begrenzung des Flächenstückes neue Begrenzungsstücke hinzu, nämlich die beiden Ufer der Durchsetzungslinien. Von diesen Begrenzungsstücken kommen jedoch nur solche Theile in Betracht, die in das gegebene Stück von T hineinfallen, diese bestehen aber immer aus **beiden** Ufern eines Theiles der Durchsetzungslinien, wenn nicht die ursprüngliche Begrenzungslinie einen Theil eines Ufers einer Durchsetzungslinie enthält, welcher Fall übrigens durch Abänderung der Durchsetzungslinien vermieden werden kann. Durch Hinzunahme dieser Begrenzungsstücke wird das gegebene Gebiet von T in ebene, einfach oder mehrfach zusammenhängende Theile zerlegt, für welche der Cauchy'sche Satz gilt. Es ist also das Integral $\int f(s,z)\,dz$, immer in derselben Richtung, z. B. immer in positiver Richtung, über die ganze Begrenzung erstreckt, unter der f auferlegten Bedingung Null. Dabei werden die gegenüberliegenden Ufer einer Durchsetzungslinie immer in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; das Integral über diese Begrenzungstheile ist Null, und es ist mithin das Integral $\int f(s,z)\,dz$, über die ursprüngliche Begrenzung erstreckt, Null, w. z. b. w. Hat f Pole in gewöhnlichen Punkten, in denen das erste Residuum nicht Null ist, so schliesst man sie zunächst durch eine kleine Berandung aus dem gegebenen Stücke aus und beweist dann genau wie im § 14, dass das Integral nicht Null ist, sondern gleich der mit $2i\pi$ multiplicirten Summe der ersten Residuen ist. In einem unendlich fernen Punkte muss statt des ersten Residuums der **negativ** genommene Coefficient der -1ten Potenz der Entwickelung nach Potenzen von z genommen werden. Eine besondere Betrachtung aber ist nothwendig, wenn ein Pol auf einen Verzweigungspunkt k fällt. Wir schliessen ihn dann ebenfalls durch eine Berandung σ und zwar durch eine kreisförmige aus, beachten aber, dass diese Berandung jenen Punkt k zweimal umgeben muss, soll sie ihn ausschliessen. Sie besteht also aus zwei Kreisen, der eine verläuft im oberen Blatte, geht um k herum über die Durchsetzungslinie d hinweg ins untere Blatt und dort wieder um k herum zum zweiten Male über d hinweg ins obere Blatt zurück. Das Integral $\int f(s,z)\,dz$ über die gegebene Begrenzung ist dann gleich der Summe der ersten Residuen der gewöhnlichen Pole plus dem Integral derselben Function $f(s,z)$ über die Berandung σ. Ist nun f dort durch die Reihe darstellbar



$$f = \frac{A_\lambda}{\sqrt{(z-k)^\lambda}} + \frac{A_{\lambda-1}}{\sqrt{(z-k)^{\lambda-1}}} + \dots + \frac{A_2}{z-k} + \frac{A_1}{\sqrt{z-k}} + B_0 + B_1\sqrt{z-k} + \dots,$$

so ist, wenn $z - k = re^{ti}$ gesetzt wird,

$$\int_\sigma f\,dz =$$

$$iA_\lambda r^{1-\frac{\lambda}{2}} \int_0^{4\pi} e^{t\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)i} dt + iA_{\lambda-1} r^{1-\frac{\lambda-1}{2}} \int_0^{4\pi} e^{t\left(1-\frac{\lambda-1}{2}\right)i} dt + \dots + iA_2 \int_0^{4\pi} dt + iA_1 r^{\frac{1}{2}} \int_0^{4\pi} e^{\frac{1}{2}ti} dt$$

$$+ iB_0 r \int_0^{4\pi} e^{ti} dt + iB_1 r^{\frac{3}{2}} \int_0^{4\pi} e^{\frac{3}{2}ti} dt + \dots,$$

$$\int_\sigma f(s,z)\,dz = 4i\pi A_2.$$

Das Cauchy'sche Integral ist also Null, auch wenn Pole auf Verzweigungspunkte fallen, vorausgesetzt, dass die **zweiten** Residuen in ihnen verschwinden. Oder allgemeiner: das Integral $\int f(s,z)\,dz$ über die ganze Begrenzung eines Stückes von T oder von ganz T immer in gleicher Richtung erstreckt, dividirt durch $2i\pi$, ist gleich der Summe der Residuen in gewöhnlichen Polen plus der doppelten Summe der zweiten Residuen in Verzweigungspunkten plus der Summe der ersten negativ genommenen Residuen der Function $z^2 w(z)$ in den unendlich fernen Punkten.

Scheidet man aus der Fläche T durch Berandung eines Punktes, in welchem $f(s, z)$ keinen Pol hat, ein kleines Gebiet aus, so bildet diese Berandung bez. durch ihre verschiedenen Ufer sowohl die Begrenzung jenes Gebietes, als auch die Begrenzung der übrigen Fläche T. Da nun das über die Berandung erstreckte Integral $\int f(s, z) dz$, als über die Berandung jenes kleinen Gebietes erstreckt, nach dem Cauchy'schen Satze Null ist, so ist es auch Null als über die Begrenzung der übrigen Fläche erstreckt, und es muss demnach die Summe der ersten Residuen, in den Verzweigungspunkten der doppelten zweiten Residuen, in den unendlich fernen Punkten der negativen ersten Residuen von $z^2 w(z)$ Null sein. Hat insbesondere die Function $f(s, z)$ nur im Endlichen liegende, auf keinen Verzweigungspunkt fallende Pole und ist im Unendlichen endlich, so ist die Summe der ersten Residuen der Function $f(s, z) : s$ Null.

Hieraus ergiebt sich (vergl. § 85), dass in jedem Falle zwischen den Residuen der Function $f(s, z)$ eine lineare homogene Relation besteht.

§ 87. Der Logarithmus der Function $f(s, z)$, also $lg f(s, z)$, wächst um so viele Multipla von $2i\pi$, wenn der Punkt s, z um die ganze Begrenzung eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden Stückes von T positiv herumgeführt wird, als die Anzahl der darin enthaltenen Punkte Null die der Punkte Unendlich übertrifft. Dabei gilt die Ordnung einer Function, die wie $\sqrt{z-k}$ für $z = k$ verschwindet, wenn k ein Verzweigungspunkt ist, wie schon immer angenommen wurde, als die erste. — Dieser Zuwachs des Logarithmus ist nämlich gleich dem Integral

$$\int d\, lg f(s, z) = \int \frac{f'(s, z)}{f(s, z)} dz$$

über die ganze Begrenzung erstreckt, und ist gleich der Summe der Residuen von $f' : f$ in gemeinen Punkten und der doppelt genommenen zweiten in Verzweigungspunkten. Die Untersuchung der gemeinen oder unendlich fernen Pole unterscheidet sich nicht von der des § 20, ihre ersten Residuen sind gleich den Ordnungen des Verschwindens der Function f und gleich den negativen Ordnungen des Unendlichwerdens der Function f. Verschwindet aber f im Verzweigungspunkte k wie $(\sqrt{z-k})^\mu$, so wird $f' : f$ unendlich gross wie $\frac{1}{2}\mu : (z-k)$. Das zweite Residuum dieser Function ist also $\frac{1}{2}\mu$. Dieses ist aber nach dem vorigen Paragraphen im Cauchy'schen Satze doppelt zu nehmen. Würde f in k unendlich gross μ^{ter} Ordnung, so wäre μ nur negativ zu nehmen. Da nun die Summe der Residuen Null ist, so muss die Zahl der Punkte Null gleich der der Punkte Unendlich sein. — Daraus lässt sich noch einmal der schon bekannte Satz schliessen, dass eine Function des Bereiches s, z jeden Werth gleich oft annimmt.

§ 88. Integrale über geschlossene Züge in T. Periodicitätsmoduln. In der Ebene bildet jedes Ufer eines geschlossenen Zuges die ganze Begrenzung eines Stückes, und das Integral einer Function, die in diesem Stück die Cauchy'schen Bedingungen befriedigt, ist Null. Dies findet in T nicht nothwendig statt. Die Linie a in der Figur des § 77 auf Seite 89 zum Beispiel begrenzt durch eines ihrer Ufer kein Stück von T, wohl aber begrenzt sie durch beide Ufer zusammen genommen die ganze Fläche T. Das über einen solchen Zug erstreckte Integral wird daher im Allgemeinen keineswegs Null sein, wenn auch die Cauchy'schen Bedingungen in der ganzen Fläche T erfüllt sind. Anders verhält es sich, wenn die Fläche T durch ein Querschnittpaar in eine einfach zusammenhängende T' zerschnitten ist. Jeder in T' verlaufende Rückkehrschnitt oder geschlossene Zug zerstückelt T' und begrenzt demnach durch eines seiner Ufer für sich, oder durch das andere mit T' zusammen ein Stück von T' vollständig, das Integral über einen solchen Zug ist Null, wenn die Bedingungen des Cauchy-schen Satzes erfüllt sind. Erstreckt man daher das Integral $\int f(s, z) dz$ von einem Punkte s_0, z_0 bis zu einem Punkte s, z auf zwei Wegen, die in T' verlaufen, so nimmt das Integral, wenn die Cauchy'schen Bedingungen erfüllt sind, beidemal denselben Werth an (vgl. § 14), sein Werth ist von dem Wege unabhängig. Beschränkt man die zulässigen Integrationswege auf T', so genügt für die Bestimmung des Integrales die Angabe der unteren und oberen Grenze, die Angabe des Weges selbst ist unnöthig. Besitzt die Function $f(s, z)$ Pole, und sind die ersten Residuen der Functionen $f(s, z)$, $sf(s, z)$ nicht Null,

so muss man noch eine weitere Zerschneidung vornehmen, wenn das Integral vom Integrationswege unabhängig werden soll. Man verbinde jeden dieser Pole durch Linien l, die im Innern von T' verlaufen und weder sich selbst, noch sich untereinander schneiden, also T' nicht zerstückeln, mit der Begrenzung von T' und bezeichne die so zerschnittene Fläche, deren Begrenzung nun die Uferpaare der neuen Linien mit enthält, mit T^*. Dann sind für das Innere von T^* die Cauchy'schen Bedingungen wieder erfüllt, das Integral ist nur von den Grenzen, nicht vom Wege abhängig, sofern dieser in T^* gewählt wird. Es kann übrigens nicht blos einen solchen Pol geben, wenn überhaupt einen, weil das Integral über die aus den Uferpaaren der Querschnitte bestehende Berandung von T', dessen Elemente in gegenüberliegenden Punkten der Querschnittufer entgegengesetzt gleich sind, Null ist.

Zu beiden Seiten eines der Querschnitte a, b hat das Integral $\int f(s,z)\,dz$ im Allgemeinen verschiedene Werthe, deren Differenzen längs eines und desselben Querschnittes oder längs einer Linie l constant sind, weil die Integrationselemente beiderseits dieselben sind. Die Differenzen ändern sich aber sprungweise an den Stellen, an denen stetige parallele Fortführung des Integrationsweges auf den beiden Ufern in T' oder in T^* nicht möglich ist, also da, wo die Querschnitte sich schneiden, oder wo Linien l in dieselben einlaufen. Soll ein solcher Sprung nicht an einer Stelle eines und desselben Querschnittes vorkommen, so ist es nöthig, und wir werden diese Annahme im Folgenden immer machen, dass die Linien l in einen Schnittpunkt der Querschnitte a, b sämmtlich einlaufen. Die Werthdifferenz eines Integrales längs eines Querschnittes heisst Periodicitätsmodul des Integrales.

Ist das erste Residuum eines Poles von $f(s,z)$ im Punkte $z=\alpha$, $s=\beta$ gleich A, so ist $\int f(s,z)\,dz$ auf dem positiven Ufer der von ihm auslaufenden Linie l um $-2i\pi A$ grösser als auf dem negativen, und es muss die Summe der Werthdifferenzen an den Linien l, wie die Summe der Residuen selbst Null sein. Fällt der Pol auf einen Verzweigungspunkt oder einen Punkt Unendlich, so tritt eine leichte Modification ein.

Besitzt $f(s,z)$ nur einfache Pole in den Verzweigungspunkten, und besitzt $sf(s,z)$ keine Pole, so ist das Integral $\int f(s,z)\,dz$ in T' überall endlich und heisst ein Integral erster Gattung. Besitzt $f(s,z)$ Pole, besitzt aber weder $f(s,z)$ noch $sf(s,z)$ einfache Pole, so wird das Integral $\int f(s,z)\,dz$ in diesen Polen unendlich gross wie eine im Bereiche s, z rationale Function und heisst ein Integral zweiter Gattung. Besitzen aber $f(s,z)$, $sf(s,z)$ nur einfache Pole, so wird in ihnen das Integral wie der Logarithmus einer rationalen Function von z unendlich gross, und das Integral heisst ein Integral dritter Gattung. Im Allgemeinen aber wird das Integral $\int f(s,z)\,dz$ sowohl rationale als logarithmische Pole enthalten und kann dann ein Integral gemischter Gattung heissen.

Sind die Periodicitätsmoduln eines Integrales zweiter Gattung an den Querschnitten a und b Null, so ist das Integral in T einwerthig und folglich eine rationale Function des Bereiches s, z. Analog lässt sich aber nicht schliessen, dass ein Integral dritter Gattung etwa der Logarithmus einer Function des Bereiches s, z sei, wenn die Periodicitätsmoduln an a und b Null sind.

§ 89. **Einfachste Integrale erster und zweiter Gattung.** Das Integral $\int f(s,z)\,dz$ mag ein allgemeines elliptisches Integral heissen. Es fragt sich, ob man die Untersuchung desselben auf eine Reihe besonders einfacher Fälle zurückführen könne, auf Typen, die möglichst wenig Parameter enthalten. Dabei wollen wir fürs nächste die Parameter k_1, k_2, k_3, k_4 des Bereiches s, z nicht zu den Parametern des Integrales zählen. Es zeigt sich, dass sich dann die Integrale erster und zweiter Gattung auf solche ohne Parameter zurückführen lassen, während dies für die Integrale dritter Gattung nicht möglich ist.

Soll das Integral $\int f(s,z)\,dz$ für keinen Werth der obern Grenze unendlich gross werden, so darf der Integrand nur in den Verzweigungspunkten unendlich gross erster Ordnung werden und muss ausserdem für $z=\infty$ unendlich klein zweiter Ordnung werden (oder im Falle ein Verzweigungspunkt ins Unendliche fällt, unendlich klein dritter Ordnung in T, als Function von z in $\frac{3}{2}$ ter Ordnung), es muss also $f.s$ überall endlich, also constant sein. Es giebt deshalb nur ein überall endliches Integral oder ein Integral erster Gattung, nämlich das Integral

$$\int (1:s)\,dz,$$

und jedes andere unterscheidet sich davon nur durch einen constanten Factor, den wir nicht als einen Parameter des Integrales ansehen, weil er vor das Integralzeichen gesetzt werden kann. Da noch der Anfangswerth willkürlich ist, so enthält das Integral erster Gattung zwei willkürliche Constanten und ist in der Form $c'+c\int(1:s)\,dz$ enthalten.

Soll ein Integral zweiter Gattung gebildet werden, welches nur einmal unendlich gross wird, und ausser den Parametern des Bereiches s, z keinen neuen Parameter enthält, so kann man den Punkt Unendlich auf einen Verzweigungspunkt $z=k_\mu$ fallen lassen. Wird aber eine Function in einem Verzweigungspunkte unendlich gross erster Ordnung, so wird ihr Differentialquotient unendlich gross dritter Ordnung. Der Integrand $f(s,z)$ muss deshalb nach Multiplication mit s eine Function sein, die nur im Punkte k_μ wie Const.$:(z-k_\mu)$ unendlich gross wird, und es ist demnach $s.f$ in der Form

$$(az+b):(z-k_\mu) = a+(b+ak_\mu):(z-k_\mu)$$

enthalten. Somit ist ein solches einfaches Integral zweiter Gattung noch weiter zerlegbar, weil in

$$\int\frac{(az+b)}{(z-k_\mu)s}\,dz = a\int\frac{dz}{s}+(b+k_\mu a)\int\frac{dz}{(z-k_\mu)s}$$

der erste Theil rechts ein Integral erster Gattung ist. Als einfachste Integrale zweiter Gattung ergeben sich demnach vier, nämlich $\int(1:(z-k_\mu)s)\,dz$, wo μ die Werthe 1, 2, 3, 4 annehmen kann, und es ist kein Grund vorhanden, einen der Verzweigungspunkte zu bevorzugen. Beachtenswerth ist, dass ein solches Integral aus dem erster Gattung durch Differentiation nach einem Verzweigungspunkte erhalten werden kann. — Es ist nicht möglich, das Integral zweiter Gattung ohne Einführung neuer Transcendenten weiter zu reduciren, namentlich ist es nicht möglich, dasselbe etwa durch eine Summe aus einer rationalen Function R von s und z und einem Integrale erster Gattung darzustellen. Denn wäre

$$\int\frac{dz}{(z-k_\mu)s} = R(s,z)+C\int\frac{dz}{s},\quad R(s,z)=\int\frac{dz}{(z-k_\mu)s}-C\int\frac{dz}{s}=\int\frac{Cz+C'}{(z-k_\mu)s}\,dz$$

so würde $R(s,z)$ eine in T einwerthige Function sein, die nur in einem Punkte unendlich gross würde, was nach § 82 nicht möglich ist.

Ist nun $f(s,z)$ eine Function des Bereiches s, z, und sind die ersten Residuen in den Polen derselben Null, und sind in den Verzweigungspunkten und dem unendlich fernen Punkte die ersten Residuen von $sf(s,z)$ Null, so lässt sich $\int f(s,z)\,dz$ durch eine rationale Function plus einem Integrale erster Gattung plus einem Integrale zweiter Gattung mit nur einem Unendlich darstellen. Die Pole des Integrales und deren Residuen sind durch die Pole von f vollständig bestimmt, nur ist zu beachten, dass das Integral im Unendlichen Pole haben kann, ohne dass f dort Pole hat. Es lässt sich eine Function $g(s,z)$ des Bereiches s, z finden (§ 84), welche genau dieselben Pole als das Integral hat, und deren Residuen ebenfalls dieselben sind, ausgenommen ein erstes Residuum in irgend einem der Pole. Besitzt das Integral einen Pol in einem Verzweigungspunkte, dessen erstes Residuum nicht verschwindet, so wählen wir $g(s,z)$ so, dass alle übrigen Residuen mit denen des Integrales übereinstimmen, wodurch jenes letzte bestimmt ist und im Allgemeinen von dem entsprechenden des Integrales verschieden sein wird. Sind aber die ersten (und vielleicht auch die höhern) Residuen des Integrales in den Verzweigungspunkten Null, so lassen wir trotzdem die Function g in einem Verzweigungspunkte einen Pol mit nicht verschwindendem ersten Residuum besitzen. Dann können alle übrigen Residuen mit dem des Integrales gleich angenommen werden, und es ist

$$\int\big(f(s,z)-g'(s,z)\big)\,dz,$$

wenn g' der totale Differentialquotient von g nach z ist, ein Integral zweiter Gattung mit nur einem Pole in einem Verzweigungspunkte, etwa in k_μ, und also in der Form

$$c\int(1:(z-k_\mu)s)\,dz+c'\int(1:s)\,dz$$

enthalten. Mithin hat man

$$\int f(s,z)\,dz = g(s,z)+\int(f-g')\,dz = g(s,z)+c\int\frac{dz}{(z-k_\mu)s}+c'\int\frac{dz}{s}.$$

Die Grössen c und c' können natürlich in speciellen Fällen verschwinden. — Dies ist ein principielles Resultat. Praktische Methoden zur Reduction sollen gegeben werden, wenn für s eine sogenannte Normalform eingeführt worden ist. Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass man ein Integral zweiter Gattung bilden kann, mit beliebigen Polen und beliebig vorgegebenen Residuen, und da man demselben noch ein Integral erster Gattung hinzufügen darf, so kann auch noch einer der beiden Periodicitätsmoduln, am Querschnitt a oder am Querschnitt b, willkürlich angenommen werden. Ist dies geschehen, so bleibt nur noch eine additive Constante unbestimmt.

§ 90. **Integrale dritter Gattung.** Erheblich anders verhalten sich Integrale $\int f dz$, wenn dieselben logarithmische Bestandtheile enthalten, die nur in T^* einwerthig sind. Wird eine Function im Punkte $s = \beta_\mu$, $z = \alpha_\mu$ wie $A_\mu \, lg(z - \alpha_\mu)$ unendlich gross, so soll A_μ das logarithmische Residuum des Punktes, den man logarithmischen Pol nennen kann, heissen. Um die Betrachtung zu vereinfachen, ziehen wir von dem Integral $\int f dz$ ein Integral zweiter Gattung ab, welches dieselben Pole und Residuen als $\int f dz$ besitzt, so dass die Differenz nur noch logarithmische Pole besitzt, oder wir zerlegen das Integral in ein Integral zweiter Gattung und in ein solches mit rein logarithmischen Polen, oder wir nehmen, und zwar, wie man sieht, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, an, dass $\int f(s,z) dz$ nur rein logarithmische Pole besitzt.

Ein solches Integral lässt sich weder von den in ihm enthaltenen Parametern befreien, noch auch, etwa durch Absonderung von Logarithmen rationaler Functionen von s und z, durch eine im Voraus bestimmte Anzahl von Einzelintegralen darstellen. Die Integrale zweiter Gattung liessen sich auf eine rationale Function vermehrt um ein specielles Integral zweiter Gattung und ein Integral erster Gattung reduciren, während hier im Allgemeinen nur eine Reduction auf eine Summe von Einzelintegralen möglich ist, die alle nur einen Parameter haben, deren Zahl aber im Allgemeinen der Zahl der Punkte Unendlich gleich ist.

Wird das Integral $\int f(s,z) dz$ in den Punkten $s = \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots, \beta_n$, $z = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_n$ logarithmisch unendlich gross mit den Residuen $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n$, so ist $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = 0$, weil das Integral über die Berandung von T^* Null ist, wie im § 88 bemerkt wurde. Einer andern Bedingung aber sind diese Residuen nicht unterworfen. Bildet man nun den Ausdruck

$$F = \int f(s,z) dz - lg\, g(s,z),$$

so kann man im Allgemeinen $g(s,z)$ nicht so einrichten, dass die Zahl der Punkte Unendlich dieses Ausdruckes geringer ist, als die des Integrales $\int f dz$. Um für $lg\, g(s,z)$ eine Function zu erhalten, die noch mehr Constanten enthält, schreiben wir statt $lg\, g(s,z)$

$$C_1\, lg\, \varphi_1(s,z) + C_2\, lg\, \varphi_2(s,z) + \ldots + C_n\, lg\, \varphi_n(s,z)$$

und nehmen für $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ Functionen zweiter Ordnung, die bez. in den Punkten α_1, λ; α_2, λ; $\ldots$; α_n, λ unendlich gross werden, und setzen $C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 0$, so dass jene Summe logarithmischer Functionen in dem Punkte λ nicht unendlich gross wird. Die Punkte Null der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ seien bez. γ_1, μ; γ_2, μ, $\ldots$, γ_n, μ, so wird die Summe der logarithmischen Functionen in den Punkten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ unendlich gross werden, im Punkte μ aber endlich bleiben. In der Differenz

$$\int f(s,z) dz - C_1\, lg\, \varphi_1 - C_2\, lg\, \varphi_2 - \ldots - C_n\, lg\, \varphi_n$$

lassen sich nun die Zahlen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ so wählen, dass die Function in beliebig vielen der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nicht mehr unendlich wird, dafür treten aber genau so viele neue Punkte $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ als Punkte Unendlich in die Differenz ein. Bei besonderen Lagen der α können allerdings gruppenweise Punkte γ zusammenfallen, und so kann sich die Zahl der Punkte Unendlich vermindern, ja sie kann Null sein, in welchem Falle $\int f dz$ sich vollständig durch eine solche logarithmische Summe vermehrt um ein Integral erster Gattung, welches wiederum in speciellen Fällen Null sein kann, darstellen lässt. Im Allgemeinen aber ist dies nicht möglich.

Die grösste Vereinfachung eines solchen Integrales dritter Gattung besteht darin, dass man dasselbe durch eine Summe von Integralen darstellt, welche je von nur einem Parameter abhängen. Die Einzelintegrale der Summe sind alle derselben Natur, bloss der in ihnen enthaltene Parameter hat

für jedes derselben einen andern Werth. — Zunächst bilden wir ein Integral, welches in den Punkten $\beta_\mu, \alpha_\mu; \beta_{\mu+1}, \alpha_{\mu+1}$ logarithmisch unendlich wird, sonst endlich bleibt. Es ist in der Form enthalten

$$w(s, z; \beta_\mu, \alpha_\mu; \beta_{\mu+1}, \alpha_{\mu+1}) = \int \frac{s(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}) + \beta_\mu(z - \alpha_{\mu+1}) + \beta_{\mu+1}(z - \alpha_\mu)}{(z - \alpha_\mu)(z - \alpha_{\mu+1})s} dz.$$

Der Integrand wird im Unendlichen unendlich klein zweiter Ordnung und ausser in den Verzweigungspunkten noch in den Punkten $\beta_\mu, \alpha_\mu; \beta_{\mu+1}, \alpha_{\mu+1}$ unendlich gross erster Ordnung. Das Integral wird demnach in den letzteren Punkten logarithmisch unendlich und bleibt sonst endlich. Ist das logarithmische Residuum von w im Punkte α_μ gleich A_μ, so ist es im Punkte $\alpha_{\mu+1}$ gleich $-A_\mu$. Bildet man nun die Summe

$$C_1 w(s, z; \beta_1, \alpha_1; \beta_2, \alpha_2) + C_2 w(s, z; \beta_2, \alpha_2; \beta_3, \alpha_3) + \ldots + C_{n-1} w(s, z; \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}; \alpha_n, \beta_n),$$

so sind $B_1, B_2, \ldots, B_n$ die Residuen in den Punkten $\beta_1, \alpha_1; \beta_2, \alpha_2; \ldots; \beta_n, \alpha_n$, wenn man

$$C_1 A_1 = B_1, \quad -C_1 A_1 + C_2 A_2 = B_2, \quad \ldots, \quad -C_{n-2} A_{n-2} + C_{n-1} A_{n-1} = B_{n-1}, \quad -C_n A_n = B_n$$

setzt, und es ist $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = 0$, sonst aber sind die B willkürlich. Es lassen sich daher die C so bestimmen, dass

$$\int \left(f(s, z) - \frac{d \Sigma_\mu C_\mu w(s, z; \beta_\mu, \alpha_\mu; \beta_{\mu+1}, \alpha_{\mu+1})}{dz} \right) dz$$

überall endlich und deshalb ein Integral erster Gattung $u(s, z)$ ist.

Zerlegt man nun weiter

$$w(s, z; \beta_\mu, \alpha_\mu; \beta_{\mu+1}, \alpha_{\mu+1})$$
$$= (\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu) \int \frac{dz}{(z - \alpha_\mu)(z - \alpha_{\mu+1})} + \beta_\mu \int \frac{dz}{(z - \alpha_\mu)s} + \beta_{\mu+1} \int \frac{dz}{(z - \alpha_{\mu+1})s},$$

so ist der erste Theil ein gewöhnlicher Logarithmus, die beiden andern Integrale aber sind Integrale dritter Gattung, die nur je von einem Parameter abhängen, der in beiden verschiedene Werthe, α_μ bez. $\alpha_{\mu+1}$, hat. Diese letztern Integrale werden in zwei übereinander liegenden Punkten der Fläche T unendlich gross. Bezeichnet man ein solches Integral mit $w(s, z; \alpha_\mu)$, so ist

$$\int f(s, z)\, dz = D_1 w(s, z; \alpha_1) + D_2 w(s, z; \alpha_2) + \ldots + D_n w(s, z; \alpha_n) + \Sigma_\mu E_\mu lg(z - \alpha_\mu) + M u(s, z),$$

worin die D, E und M constante Grössen sind. — So haben wir wenigstens im Princip eine Reduction der allgemeinen Integrale dritter Gattung auf eine Summe einfacherer, von einem Parameter abhängender, in denen dieser Parameter verschiedene Werthe hat; praktische Methoden für diese Reduction sollen erst gegeben werden, nachdem s eine sogenannte Normalform erhalten hat.

Das allgemeine elliptische Integral $\int f(s, z)\, dz$ lässt sich nach dem vorigen und nach diesem Paragraphen darstellen als eine Summe einer algebraischen Function, eines Aggregates von Logarithmen, einem Integral erster Gattung, einem zweiter Gattung und einer Summe von Integralen dritter Gattung, die jedes nur von einem Parameter abhängen, der in jedem Integrale einen andern Werth hat.

§ 91. **Ein aus den Periodicitätsmoduln des Integrales erster Gattung gebildetes Parallelogramm hat einen positiven Inhalt.** Setzt man in dem Doppelintegral des § 12

$$\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ für } X, \quad \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ für } Y,$$

so folgt daraus

$$\iint \left[\frac{\partial \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right] dx\, dy$$
$$= \iint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy + \iint \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dx\, dy = -\int \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos t - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin t \right) ds,$$

worin s und t die Bedeutung wie in § 12 haben, dass ds ein positives Begrenzungselement und t seine Neigung gegen die x-Achse ist. Ist aber φ der reelle, $i\psi$ der imaginäre Theil einer Function der complexen Veränderlichen $z = x + yi$, so dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

ist, so schliesst man weiter

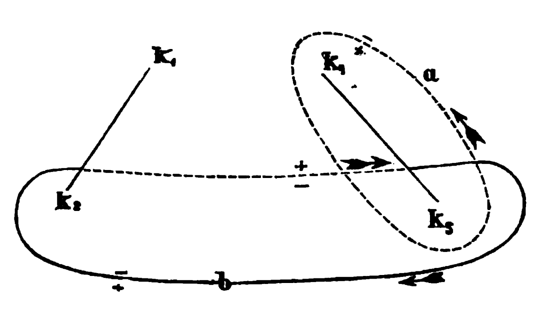
$$\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\int\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos t+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\sin t\right)ds=\int\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right)=\int\varphi\,d\psi,$$

worin das einfache Integral positiv um die ganze Begrenzung des Integrationsgebietes zu erstrecken ist.

Das Integrationsgebiet sei jetzt die Fläche T', und $\varphi+i\psi$ sei das überall endliche Integral

$$w=\int(c:s)\,dz,$$

welches bei a den Periodicitätsmodul $2\pi_1=\alpha+\beta i$, bei b den Periodicitätsmodul $2\pi_2=\gamma+\delta i$ haben möge. Dann ist $\int\varphi\,d\psi$ gleich der Summe der Integrale $\int(\varphi^+-\varphi^-)\,d\psi$ über die Linien a und b, wenn φ^+ den Werth von φ auf dem positiven, φ^- den auf dem negativen Ufer dieser Linien bedeutet. Die Linie a führt vom negativen Ufer von b aufs positive, b vom positiven Ufer von a aufs negative; es ist deshalb



$$\int_{(a)}(\varphi^+-\varphi^-)\,d\psi=\alpha\int_{(a)}d\psi=\alpha\delta,$$

$$\int_{(b)}(\varphi^+-\varphi^-)\,d\psi=\gamma\int_{(b)}d\psi=-\gamma\beta,$$

weil das Integral über einen Querschnitt die Werthdifferenz des Integrales auf den beiden Ufern des andern Querschnittes, also den Periodicitätsmodul, liefert. Somit folgt

$$\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\alpha\delta-\beta\gamma.$$

Die rechte Seite ist der Inhalt des aus den Perioden π_1, π_2 gebildeten Parallelogrammes, und aus der Natur der linken Seite folgt, dass dieser positiv ist, auch der Fall, dass er Null sei, ist ausgeschlossen.

In den Verzweigungspunkten sind allerdings die partiellen Differentialquotienten von φ unendlich gross, man muss deshalb dieselben durch beliebig kleine (etwa kreisförmige) Berandungen ausschliessen. Es ist aber leicht erkenntlich, dass $\int\varphi\,d\psi$, über diese Berandungen erstreckt, mit diesen Berandungen beliebig klein wird, und dass deshalb die Richtigkeit durch sie nicht gestört wird. Es hat demnach $\pi_2:\pi_1$ stets einen positiv imaginären Theil, weil das Parallelogramm gleich $4\,abs\,\pi_1\,.\,abs\,\pi_2\,.\,sin\,arc\,(\pi_2:\pi_1)$ ist, und die Periodicitätsmoduln können nicht in einem rein reellen Verhältnisse stehen, können daher auch nicht rein imaginär sein, und es hat $i\pi\pi_2:\pi_1$ einen negativ reellen Theil. Dabei ist die Möglichkeit, die Querschnitte zu wählen, unendlich gross.

Der hier gegebene Beweis ist von Riemann. Andere Beweise findet man bei Falk, Acta mathematica Bd. 7, und bei Pringsheim, Leipziger Annalen Bd. 27.

§ 92. **Die Werthe u eines überall endlichen Integrales bedecken ein Parallelogramm in der u-Ebene überall einfach.** Nach den über die Periodicitätsmoduln im vorigen Paragraphen gefundenen Sätzen lassen sich Thetafunctionen bilden, deren Modul $\tau=i\pi\pi_2:\pi_1$, und deren Argument $z=-i\pi u:2\pi_1$ ist, wo u den Werth $\int(1:s)\,dz$ hat, und die untere Grenze noch beliebig ist. Werden die Theta in dieser Weise construirt vorausgesetzt, so ist $\Theta_{11}(u-e)$ eine in T' einwerthige, überall endliche Function. Der Zuwachs, den $lg\,\Theta_{11}(u-e)$ erfährt, wenn s, z über die Begrenzung von T' geführt wird, also das Integral $\int d\,lg\,\Theta_{11}(u-e)$, ist gleich

$$\int_{(a)}d(lg\,\Theta_{11}(u^+-e)-lg\,\Theta_{11}(u^--e))+\int_{(b)}d(lg\,\Theta_{11}(u^+-e)-lg\,\Theta_{11}(u^--e))$$

$$=\int_{(b)}d\left(\frac{-ui\pi}{\pi_1}\right)=2i\pi,$$

es wird demnach $\Theta_{11}(u-e)$ in T' einmal und nur einmal Null. Dies findet aber statt, wenn

$$u\equiv e\,(2\pi_1,2\pi_2)$$

ist, und es ist demnach u in T' jedem Werthe e einmal und nur einmal congruent. Nimmt u den Werth e wirklich an, so nimmt es diesen Werth nur einmal an. Der Begrenzung von T', den positiven und negativen Ufern von a und b, entspricht daher in der u-Ebene eine geschlossene **knotenlose** Linie, die,

weil sich die Werthe von u in gegenüberliegenden Punkten der beiden Ufer der Querschnitte a, b um constante Grössen unterscheiden, aus zwei Paaren paralleler Stücke besteht und deshalb ein Parallelogramm genannt werden darf, wobei die parallelen Begrenzungsstücke freilich im Allgemeinen krumme Linien sein werden. Das Innere des Parallelogrammes ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Jeden Werth u_0 im Innern desselben nimmt u einmal und nur einmal in T' an. Denn u ist in T' dem Werthe u_0 nach dem eben bewiesenen Satze sicher einmal und nur einmal congruent. Wegen der Stetigkeit aber ist dieser congruente Werth u_0 selbst. Verbindet man den Werth s_0, z_0, für welchen u in T' congruent u_0 ist, durch eine Linie mit der Begrenzung, so muss u, wenn man z vom Ausgangspunkte jener Linie auf der Begrenzung nach s_0, z_0 längs dieser Linie hinführt, in der u-Ebene einen Weg beschreiben, der ins Innere des Parallelogrammes führt, wegen der Winkeltreue der Abbildung, und dieser Weg kann nicht über die Begrenzung weg aus dem Parallelogramme herausführen, weil u keinen Werth zweimal annimmt.

§ 93. Wahl einer Normalform für s. Die Aufgabe, Functionen von s und z als Functionen von u darzustellen, nennt man das Umkehrproblem. Es steht nichts im Wege, für die Lösung desselben die Lage der Verzweigungspunkte allgemein zu lassen, und es ist leicht nachzuweisen, dass die Thetafunktionen mit den vier Charakteristiken, wenn $u(0,k_1) = 0$ ist, den Functionen

$$\sqrt{z-k_1},\ \sqrt{z-k_2},\ \sqrt{z-k_3},\ \sqrt{z-k_4}$$

proportional sind. Diese Quotienten sind in T' einwerthig und unterscheiden sich zu beiden Seiten des einen oder des andern Querschnittes, oder beider, durchs Vorzeichen. In der Theorie der ultraelliptischen Functionen ist es sogar rathsam, die Lage der Verzweigungspunkte gänzlich willkürlich zu lassen; bei den elliptischen Functionen aber, wo es gelingt, den Bereich s, z von nur einem Parameter abhängig zu machen, ist die Specialisirung der Lagen der Verzweigungspunkte nicht blos traditionell, sondern sie macht doch auch manche Formeln übersichtlicher. Will man Tafeln zur Berechnung von u aufstellen, wie solche durch Legendre wirklich vorhanden sind, so ist es eine gebieterische Nothwendigkeit, die Eingänge derselben auf eine möglichst geringe Zahl zu reduciren, und in solchem Falle ist die Reduction auf eine Special- oder Normalform unumgänglich. — Die Normalform, welche durch Legendre in Gebrauch gebracht ist, und die Jacobi adoptirt hat, ist die $s = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$. Mit ihr hängt eine andere $s = \sqrt{z(1-z)(1-\varkappa z)}$ so nahe zusammen, dass sie immerfort neben ihr gebraucht werden kann, was in vieler Beziehung sehr nützlich ist. Wir wollen die Legendre'sche Form die Normalform I, die andere die Normalform II nennen. Die Grösse k pflegt der Modul der Legendre'schen Form und der elliptischen Functionen genannt zu werden, in der Form II würde $\varkappa$ der Modul sein. Es wäre in mancher Hinsicht bequemer, k^2 den Modul zu nennen, doch wollen wir vom Sprachgebrauche nicht abweichen.

Herr Weierstrass bedient sich einer andern Form als Normalform, nämlich der Form

$$s = \sqrt{(4z^3 - g_2 z - g_3)}.$$

Durch Wahl dieser Normalform wird die Analogie der elliptischen Functionen mit den trigonometrischen Functionen, was wohl für die Jacobi'sche Terminologie massgebend gewesen ist, aufgehoben. Ferner sind die elliptischen Functionen, welche durch die Umkehrung $z = p(u)$ des Integrales*)

$$u = \int (1 : \sqrt{(4z^3 - g_2 z - g_3)})\, dz$$

ausgedrückt werden, Functionen dreier Grössen, der Variabeln z und der Invarianten g_2 und g_3. Die Gründe, welche Herrn Weierstrass zur Wahl dieser Normalform gebracht haben, dürften die in der Anmerkung auf Seite 76 erwähnten sein. Diese Form ist jedoch keineswegs bei der Majorität der Mathematiker durchgedrungen, nicht einmal in Berlin, wie ein Blick in die Monatsberichte der Academie bis heute lehrt. Hier wird die Bezeichnung Jacobi's, der mit Abel als der eigentliche Schöpfer der Theorie

*) Für den Buchstaben p, wenn er die besprochene Function bedeutet, ist ein besonderes Zeichen für erforderlich erachtet worden, ein etwas geschnörkeltes p. Ob der graphischen Modification dieses p eine phonetische parallel läuft, ist mir nicht bekannt geworden.

der elliptischen Functionen anzusehen ist, beibehalten. Was jedoch über die Function $p(u)$ theils schon beigebracht ist, theils noch beigebracht werden wird, kann wohl eine genügende Einsicht in ihre Natur geben.

§ 94. **Reduction des Bereiches s, z auf den Normalbereich II.** Wir ersetzen nun den Bereich s, z; $s = \sqrt{(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)(z-k_4)}$ durch einen ihm congruenten, indem wir für z durch eine lineare Beziehung eine neue Grundgrösse ζ einführen, für welche die Verzweigungsstellen der adjungirten Irrationalität σ auf die Punkte $0, 1, 1:\varkappa, \infty$ fallen. Wir machen die Substitution

$$z = -(\alpha+\beta\zeta):(\gamma+\delta\zeta), \quad \zeta = -(\alpha+\gamma z):(\beta+\delta z), \quad \alpha+\beta\zeta+\gamma z+\delta\zeta z = 0.$$

Durch diese Substitution geht s in die Form

$$\sqrt{A+B\zeta+C\zeta^2+D\zeta^3+E\zeta^4}:(\gamma+\delta\zeta)^2 = s$$

über. Soll aber die linke Seite für $\zeta=0$, $\zeta=1$, $\zeta=1:\varkappa$, $\zeta=\infty$ verschwinden, soll der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen die Form $\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)$ erhalten, so muss für $\zeta=0$ $z=k_1$, für $\zeta=1$ $z=k_2$, für $\zeta=1:\varkappa$ $z=k_3$, für $\zeta=\infty$ $z=k_4$ sein. Setzt man diese Werthe in $\alpha+\beta\zeta+\gamma z+\delta\zeta z=0$ ein, so fliessen daraus die Gleichungen

$$\alpha+\gamma k_1=0, \quad \alpha+\beta+\gamma k_2+\delta k_2=0, \quad \alpha\varkappa+\beta+\gamma\varkappa k_3+\delta k_3=0, \quad \beta+\delta k_4=0,$$

die nur mit einander verträglich sind, wenn ihre Determinante, also die Grösse

$$\varkappa(k_3k_4-k_2k_3-k_1k_4+k_1k_2)+(k_3-k_4)(k_2-k_1)$$

verschwindet, so dass $\varkappa$ nicht willkürlich gewählt werden kann, sondern den Werth haben muss

$$\varkappa = \frac{k_1-k_2}{k_1-k_3}\cdot\frac{k_3-k_4}{k_2-k_4} = \frac{k_1-k_2}{k_2-k_4}:\frac{k_1-k_3}{k_3-k_4}.$$

Diese Grösse ist das aus der Geometrie bekannte Doppelverhältniss der vier Punkte k_1, k_2, k_3, k_4, und ist eine Invariante, allerdings eine irrationale, denn sie kann durch Vertauschung der Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 sechs verschiedene Werthe annehmen. Es giebt im Ganzen vierundzwanzig solcher Vertauschungen. Vertauscht man erst zwei k mit einander, dann die beiden andern, so bleibt das Doppelverhältniss ungeändert. Daraus folgt, dass das Doppelverhältniss nur sechs verschiedene Werthe annehmen kann. Diese sind aber auch wirklich im Allgemeinen alle sechs von einander verschieden, es sind nämlich die Werthe

$$\varkappa, \quad 1:\varkappa, \quad \varkappa'=1-\varkappa, \quad 1:\varkappa'=1:(1-\varkappa), \quad -\varkappa:\varkappa'=\varkappa:(\varkappa-1), \quad -\varkappa':\varkappa=(\varkappa-1):\varkappa.$$

Von diesen sind drei dem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich Eins, drei grösser oder gleich Eins. Ist $\varkappa$ reell, so sind alle sechs reell, vier unter ihnen sind positiv, und von diesen zwei kleiner als Eins. Ist $\varkappa=-1$, so giebt es nur drei Werthe des Doppelverhältnisses, nämlich -1, 2, $1:2$. Ist $\varkappa$ und sind die k reell, so ergeben sich für die Substitutionscoefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für welche die Gleichungen ja linear sind, ebenfalls reelle Werthe, und es durchläuft demnach ζ reelle Werthe, wenn z reelle Werthe durchläuft.

Die lineare Substitution, graphisch gedeutet, hat die Eigenschaft, jeden Kreis oder jede Gerade wieder in einen Kreis oder eine Gerade zu verwandeln, wenn der Nullpunkt des Nenners in

$$\zeta = -(\alpha+\gamma z):(\beta+\delta z),$$

der Abbildungspol der z-Ebene genannt, auf der Kreisperipherie (oder der Geraden) liegt. Die Figur des Kreises, wenn eine Gerade als Kreis mit unendlich grossem Radius mit zu den Kreisen gerechnet wird, ist also eine Invariante gegenüber der linearen Substitution; man kann daher nicht durch eine solche Substitution bewirken, dass die Punkte $0, 1, 1:\varkappa, \infty$ auf einer Geraden liegen, oder, was dasselbe ist, dass $\varkappa$ reell wird, wenn nicht die vier Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 ein Kreisviereck bilden oder selbst auf einer Geraden liegen. In den Anwendungen der elliptischen Functionen sind die Werthe $k_1 \ldots k_4$ meist entweder reell oder paarweise conjugirt imaginär. Sind alle vier Punkte reell, oder bilden sie zwei Paare conjugirt imaginärer Werthe, so liegen sie immer auf einem Kreisviereck; ist nur ein Paar conjugirt imaginär, so liegen sie nur in speciellen Fällen auf einem Kreise. Da im Falle complexer k die Substitutionscoefficienten complex werden, was für die Anwendung meist unbequem ist, so wird die hier gegebene Reduction hauptsächlich für reelle $k_1 \ldots k_4$ angewandt und ergiebt die Gleichungen

$$z = \frac{k_2(k_3-k_1)-k_1(k_3-k_2)\zeta}{k_3-k_1-(k_3-k_2)\zeta}, \quad \frac{dz}{s} = \frac{d\zeta:\sigma}{\sqrt{(k_3-k_1)(k_4-k_2)}}, \quad \sigma = \sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)},$$

$$\varkappa = (k_3-k_2)(k_4-k_1):(k_3-k_1)(k_4-k_2), \quad \varkappa' = (k_2-k_1)(k_4-k_3):(k_3-k_1)(k_4-k_2).$$

Hat s selbst schon einen Verzweigungspunkt im Unendlichen, und sind k_1, k_2, k_3 die andern, so führt die Substitution $z-k_1=(k_2-k_1)\zeta$, im Falle reeller k auf reellem Wege zum Ziele.

§ 95. **Reduction auf die Normalform I.** Statt von den Verzweigungspunkten drei auf im voraus bestimmte Werthe fallen zu lassen $(0, 1, \infty)$, können wir mit Legendre auch nur zwei auf solche bestimmte Punkte $(+1, -1)$ fallen lassen und fordern, dass die beiden andern sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, auf $1:k$ und $-1:k$ fallen. Indem wir dies wieder durch die bilineare Gleichung $\alpha+\beta\zeta+\gamma z+\delta\zeta z=0$ zu erreichen suchen, gewinnen wir für die Substitutionscoefficienten die vier Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma k_1+\delta k_1=0, \quad \alpha-\beta+\gamma k_2-\delta k_2=0, \quad \alpha k+\beta+\gamma k k_3+\delta k_3=0, \quad \alpha k-\beta+\gamma k k_4-\delta k_4=0.$$

Für k ergiebt die Nothwendigkeit des Verschwindens der Determinante dieser Gleichungen die Bedingung

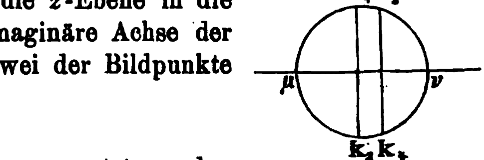
$$k^2(k_3-k_1)(k_1-k_2)+((k_1+k_2-k_3-k_4)^2-(k_1-k_2)^2-(k_3-k_4)^2)k+(k_3-k_4)(k_1-k_2)=0,$$

welche für k zwei einander reciproke Werthe ergiebt, so dass $abs\, k \leqq 1$ angenommen werden kann. Hier sind wieder vierundzwanzig Vertauschungen der k_1, k_2, k_3, k_4 möglich. Die verschiedenen Moduln, die sich bei allen möglichen Vertauschungen ergeben, sind diesmal

$$\pm k, \quad \pm\frac{1}{k}, \quad \pm\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, \quad \pm\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2, \quad \pm\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2, \quad \pm\left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2.$$

Soll k reell sein, sollen also die Punkte $1, -1, 1:k, -1:k$ auf einer Geraden liegen, so müssen $k_1 \ldots k_4$, wie im vorigen Paragraphen erörtert wurde, ein Kreisviereck bilden. Sind die gegebenen vier Verzweigungspunkte reell, so ordnen wir die Indices so, dass k_3, k_4 nicht zwischen k_1 und k_2 liegen. Suchen wir zu den beiden über $\overline{k_1 k_2}$ und $\overline{k_3 k_4}$ als Durchmesser geschlagenen Kreisen die Aehnlichkeitspunkte, und machen den einen zum Abbildungspol einer linearen Abbildung, so werden die Bilder dieser beiden Kreise concentrisch, und die den Punkten k entsprechenden Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sind reell und liegen zu einem reellen Punkte, den man zum Coordinatenanfang machen kann, symmetrisch, und es bedarf nur noch einer passenden Wahl des Massstabes, um zwei davon auf die Stellen ± 1 zu werfen. Man erkennt so, dass es möglich ist, durch eine reelle Substitution die Irrationalität in die Legendre-sche Normalform mit reellem Modul zu bringen, was auch leicht algebraisch nachweisbar ist.

§ 96. **Der Fall zweier Paare conjugirt complexer Verzweigungswerthe.** Sind k_1, k_2, k_3, k_4 zweimal paarweise conjugirt imaginär, so kann man durch lineare reelle Substitution für z nicht bewirken, dass die adjungirte Grösse s in Bezug auf die neue Veränderliche die vier Verzweigungsstellen $\pm 1, \pm 1:k$ erhalte, wo k reell ist. Wir legen in diesem Falle durch die vier Verzweigungspunkte einen Kreis, welcher die reelle Achse in den Punkten μ und ν trifft. Bilden wir nun durch die Substitution $\zeta = C(z-\mu):(z-\nu)$ die z-Ebene in die ζ-Ebene ab, so fallen die Bildpunkte der $k_1 \ldots k_4$ auf die imaginäre Achse der ζ-Ebene, und es lässt sich noch C reell so bestimmen, dass zwei der Bildpunkte auf $\pm i$ fallen. Es geht dann s in einen Ausdruck der Form



$$\sqrt{(1+\zeta^2)(1+h^2\zeta^2)},$$

multiplicirt mit einem in ζ rationalen Factor über, wo $h<1$ vorausgesetzt werden darf. Will man nun die imaginäre Achse der ζ-Ebene durch eine lineare Abbildung auf die reelle Achse drehen, so muss man $\zeta = i\zeta'$ setzen, also einen imaginären Substitutionscoefficienten zulassen. Um aber auf reellem Wege dem Differential $d\zeta:\sqrt{(1+\zeta)(1+h^2\zeta^2)}$ die Legendre'sche Normalform zu geben, setze man $\zeta=\zeta':\sqrt{1-\zeta'^2}$, so erhält man die Gleichung

$$d\zeta:\sqrt{(1+\zeta^2)(1+h^2\zeta^2)} = d\zeta':\sqrt{(1-\zeta'^2)(1-(1-h^2)\zeta'^2)}.$$

Die Differentialgleichung $dz:du = \sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}$ wird durch die elliptische Function $z = tg\,a(u,k')$ befriedigt.

§ 97. Der Fall eines Paares conjugirt complexer Verzweigungswerthe. Es seien k_1, k_2 reelle Grössen, und k_3, k_4 conjugirt imaginär. So setzen wir

$$z' = z - k_1 : z - k_2,\quad z = (z'k_2 - k_1):(z'-1),\quad s = s':(z,-1)^2,\quad s' = \sqrt{z'(z'^2-2pz'+q^2)},$$

wo $q^2 > p^2$ ist, wenn k_3, k_4 complex sind. Dieser Ausdruck geht durch die Substitution

$$z' = q(1-\zeta):(1+\zeta)$$

in die Form über $s' = q\sqrt{2(q-p)}\,.\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}:(1+\zeta)^2$, $k^2 = (p+q):(p-q)$. Dabei hat k^2 einen reellen negativen Werth. — Die Legendre'schen Tafeln erfordern für k^2 einen positiven Werth, zu welchem man durch eine Substitution zweiter Ordnung

$$\zeta = \zeta':k'\sqrt{1+\frac{k^2}{k'^2}\zeta'^2}$$

gelangen kann.

Man kann unter allen Umständen durch eine lineare, wenn auch nicht immer reelle, Substitution bewirken, dass die Grundgrösse s des Bereiches s, z die Form

$$\text{(I.)}\ \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\quad\text{oder}\quad\text{(II.)}\ \sqrt{z(1-z)(1-\varkappa z)}$$

gewinnt. Die Functionen des Bereiches (II.) lassen sich in Functionen des Bereiches (I.) transformiren, wie man erkennt, wenn man im Bereich (II.) z durch z^2 und s durch $s:z$, $\varkappa$ durch k^2 ersetzt; und die Integration einer Function des Bereiches (I.) lässt sich, was man bei den einfachen Integralen erster, zweiter und dritter Gattung erkennen wird, auf die Integration einer Function des Bereiches (II.) zurückführen, und es könnte deshalb genügen, wenn den weiteren Untersuchungen der Bereich (II.) zu Grunde gelegt würde. In den Anwendungen der elliptischen Functionen ist es von Interesse, dass k reell, und dass auch $dz:s$ reell sei. Indessen auch rein imaginäre k (negative $\varkappa$) und rein imaginäre u bieten den Rechnungen meist kein erhebliches Hinderniss. Für alle in der Praxis vorkommenden Fälle Regeln zu geben, welche Substitutionen die besten sind, würde zu einer grossen Zahl von Specialbetrachtungen führen, und es ist nicht leicht, dabei erschöpfend zu sein, weshalb wir von weiterem Eingehen auf diesen Gegenstand absehen. Es trifft sich oft, dass das Problem selbst auf die beste Transformation führt oder gleich von vornherein eine solche Wahl der Veränderlichen zulässt, die für die Berechnung bequem ist. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Grundgrösse s des Bereiches s, z in der Normalform (II.) oder (I.) gegeben sei.

§ 98. Reduction des Integrales $\int f(s,z)dz$, wenn $s = \sqrt{z(1-z)(1-\varkappa z)}$ ist. Die Function $f(s,z)$ lässt sich, wie im § 79 gezeigt, auf die Form bringen

$$f(s,z) = (G_1(z)+G_2(z)s):G_3(z) = G_1(z):G_3(z) + s^2G_2(z):sG_3(z),$$

worin G_1, G_2, G_3, s^2G_2 ganze Functionen von z sind. Die Integration $\int(G_1:G_3)dz$ führt auf rationale Functionen und Logarithmen und wird als erledigt angesehen. Den Ausdruck $s^2G_2:G_3$ aber zerlegt man in Partialbrüche und erhält so eine Summe von Integralen der beiden Formen

$$\int\frac{z^\nu dz}{s},\quad \int\frac{dz}{(z-a)^\nu s},$$

wo ν eine ganze Zahl ist. Diese Integrale lassen sich aber, wie wir aus §§ 89 und 90 principiell schon wissen, noch weiter vereinfachen. Differenziren wir den Ausdruck $z^\nu s$ nach z, wo ν auch eine negative ganze Zahl sein darf, so erhalten wir

$$dz^\nu s = (z^{\nu+2}(3+2\nu)\varkappa - z^{\nu+1}(2+2\nu)(1+\varkappa) + z^\nu(2\nu+1))dz:2s,$$

woraus sich, wenn wir zur Abkürzung $\frac{1}{2}\int(z^\nu:s)dz$ mit I_ν bezeichnen, die Recursionsformel ergiebt

$$(2\nu+3)\varkappa I_{\nu+2} - (2\nu+2)(1+\varkappa)I_{\nu+1} + (2\nu+1)I_\nu = z^\nu s.$$

Für $\nu = 0, 1, 2, -1, -2$ ergeben sich hieraus bez. die Formeln

$$\int z^2 du = \frac{s}{3x} + \frac{2}{3}\frac{1+x}{x}\int z\,du - \frac{1}{3x}\int du,$$

$$\int z^3 du = \frac{s}{5x}\left(z + \frac{4}{3}\frac{1+x}{x}\right) + \left[\frac{2}{3}\frac{4}{5}\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 - \frac{3}{5x}\right]\int z\,du - \frac{4}{5}\frac{1+x}{3x^2}\int du,$$

$$\int z^4 du = \frac{s}{7x}\left[z^2 + \frac{6}{5}\frac{1+x}{x}z + \frac{4}{3}\frac{6}{5}\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 - \frac{5}{3x}\right]$$

$$+ \left[\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\left(\frac{1+x}{x}\right)^3 - \frac{8.13}{3.5.7}\frac{1+x}{x^2}\right]\int z\,du - \frac{1}{7x}\left[\frac{4}{3}\frac{6}{5}\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 - \frac{5}{3x}\right]\int du,$$

$$\int z\,du = \frac{s}{xz} + \int\frac{du}{xz}, \quad \int du = -\frac{s}{xz^2} + \frac{2(1+x)}{x}\int\frac{du}{z} - \frac{3}{x}\int\frac{du}{z^2},$$

worin du eine Abkürzung ist für $\frac{1}{2}dz:s$. Für ein beliebiges positives ν aber erhält man einen Ausdruck von der Form

$$\int z^{\nu+2} du = s(a_{\nu+1}z^\nu + a_\nu z^{\nu-1} + \ldots + a_2 z + a_1) + a_0 x\int z\,du - a_1\int du,$$

und es lassen sich die a durch Näherungswerthe eines Kettenbruches darstellen, in welcher Beziehung man einen Aufsatz von mir in Crelle's Journal Bd. 81 vergleichen mag. — Es lässt sich also, gleichviel ob ν positiv oder negativ ist, $\int z^\nu du$ durch das überall endliche Integral u und das Integral erster Gattung $\int z\,du$, oder, wenn man lieber will, das Integral erster Gattung $\int z^{-1}du$ ausdrücken. Die beiden Integrale $\frac{1}{2}\int(z:s)\,dz$ und $\frac{1}{2}\int(1:zs)\,dz$ sind aber einfachste Integrale erster Gattung, weil das eine nur in dem unendlich fernen Verzweigungspunkte, das andere im Verzweigungspunkte $z=0$ der Fläche T unendlich gross erster Ordnung (im Bereiche s, z) wird.

Differenzirt man den Ausdruck $(z-a)^{-\nu+1}s$ nach z, nachdem s^2 in den Ausdruck

$$a(1-a)(1-xa) + (z-a)(1-2(1+x)a+3xa^2) + (z-a)^2(3xa-1-x) + x(z-a)^3$$
$$= g(a) + (z-a)g'(a) + \tfrac{1}{2}g''(a)(z-a)^2 + x(z-a)^3$$

umgeordnet ist, so findet man

$$\frac{d(z-a)^{1-\nu}s}{dz} = \frac{(z-a)^3(5-2\nu) + (z-a)^2(\nu-2)g''(a) + (z-a)(3-2\nu)g'(a) + (2-2\nu)g(a)}{2s(z-a)^\nu}.$$

Durch Integration erhält man die im Bezug auf das Integral viergliedrige Recursionsformel

$$2(1-\nu)g(a)\int\frac{du}{(z-a)^\nu} + (3-2\nu)g'(a)\int\frac{du}{(z-a)^{\nu-1}} + (\nu-2)g''(a)\int\frac{du}{(z-a)^{\nu-2}}$$
$$+ (5-2\nu)x\int\frac{du}{(z-a)^{\nu-3}} = \frac{s}{(z-a)^{\nu-1}},$$

welche dreigliedrig wird, sobald a auf einen der Werthe $0, 1, 1:x$ fällt. In den letzten drei Fällen lässt sich durch Anwendung dieser Recursionsformel das Integral durch eine rationale Function von s und z, durch das Integral $\int du$ und bez. eins der Integrale

$$\int\frac{du}{z}, \quad \int\frac{du}{1-z}, \quad \int\frac{du}{1-xz}$$

also durch Integrale erster und zweiter Gattung darstellen. Jedes dieser drei Integrale lässt sich durch dieselbe Recursionsformel durch $\int z\,du$ darstellen, wir halten jedoch eine solche Darstellung für überflüssig, weil die vier in einem Verzweigungspunkte unendlich gross werdenden Integrale erster Gattung völlig gleichberechtigt sind.

Fällt aber a nicht auf einen Verzweigungspunkt, so ist die Recursionsformel so oft anzuwenden, bis $\nu-3$ den Werth -1 erhält, und es wird dann das Integral in die Form gebracht

$$\int\frac{du}{(z-a)^\nu} = R(s,z) + c\int du + c'\int z\,du + c''\int\frac{du}{z-a},$$

also durch eine rationale Function $R(s,z)$ des Bereiches s, z, durch ein Integral erster, ein Integral zweiter und ein einfaches, nur in zwei übereinander liegenden Punkten von T logarithmisch unendlich gross werdendes Integral dritter Gattung ausgedrückt.

§ 99. **Reduction des Integrales $\int f(s,z)\,dz$, wenn $s = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ ist.** Es ist leicht, die Reduction für diesen Fall auf die des vorigen Paragraphen zurückzuführen. Wird

$$f(s,z) = R(z) + H(z):s\,G(z)$$

gesetzt, wo R eine rationale Function von z, H, G aber ganze Functionen sind, so ist $\int R\,dz$ nicht weiter zu untersuchen, weil die Integration auf rationale Functionen und Logarithmen führt. Für $H(z):s\,G(z)$ aber schreiben wir $H(z)\,G(-z):s\,G(z)\,G(-z) = L(z^2) + z\,M(z^2):s\,N(z^2)$, wo L, M und $N = G(z)\,.\,G(-z)$ ganze Functionen von z^2 sind.

Zur Integration dieses Theiles führen wir eine neue Variabele durch die Gleichung $z^2 = \zeta$, $2z\,dz = d\zeta$ ein, so wird (wenn $\sigma = \sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}$ ist)

$$\int \frac{L(z^2) + z\,M(z^2)}{N(z^2)\,s}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{L(\zeta)}{N(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\sigma} + \frac{1}{2}\int \frac{M(\zeta)\,d\zeta}{N(\zeta)\sqrt{(1-\zeta)(1-k^2\zeta)}},$$

und es kann das zweite Integral durch rationale Functionen von ζ und σ, also auch von s und z, und durch Logarithmen (cyklometrische Functionen) nach bekannten Regeln der Integralrechnung ausgeführt werden, es erübrigt nur, das Integral

$$\int (L(\zeta):N(\zeta))\,du$$

($du = \frac{1}{2}d\zeta:\sigma$) zu reduciren. Die Reduction dieses Integrales auf rationale und logarithmische Functionen von σ und ζ, also auch von s und z, und auf die Integrale

$$\int \frac{\frac{1}{2}d\zeta}{\sigma} = \int \frac{dz}{s}, \quad \int \frac{\frac{1}{2}\zeta\,d\zeta}{\sigma} = \int \frac{z^2\,dz}{s}, \quad \int \frac{\frac{1}{\sqrt{a}\,2}\,d\zeta}{(\zeta-a)\,\sigma} = \int \frac{dz}{(z^2-a)\,s}$$

ist aus dem vorigen Paragraphen bekannt. — Dies sind die Legendre'schen Normalformen für die Integrale erster, zweiter und dritter Gattung. Sie entsprechen im Grunde nicht den von uns aufgestellten Forderungen grösster Einfachheit, denn das Integral zweiter Gattung wird nicht in einem Verzweigungspunkte, sondern im unendlich fernen Punkte der Fläche T' unendlich gross erster Ordnung (in der Entwickelung des Integranden nach absteigenden Potenzen von z, die mit einer Constanten beginnt, fehlt die -1te Potenz), und das Integral dritter Gattung wird nicht nur in zwei Punkten, sondern in vier in der Fläche T' paarweise über $z = +\sqrt{a}$ und $z = -\sqrt{a}$ übereinander liegenden Punkten logarithmisch unendlich. Dass man gerade auf diese Formen gekommen ist, beweist, dass die Normalform (II.) gewissermassen unbewusst bei ihrer Aufstellung massgebend gewesen ist.

§ 100. **Bedeutung der Thetafunctionen für die Integrale des Bereiches s, z.** Mit Hilfe der Thetafunctionen gelingt es, die Integrale erster Gattung eindeutig umzukehren, d. h. die obere Grenze des Integrales oder eine Function derselben durch den Werth des Integrales selbst eindeutig auszudrücken. Dies wird noch weiter ausgeführt werden, es kann aber sogleich darauf hingewiesen werden, dass die durch Thetaquotienten dargestellten Functionen $sa\,u$, sa^2u Differentialgleichungen befriedigen (siehe § 42 und § 56), die, in Integralform geschrieben, unmittelbar auf die Integrale erster Gattung führen.

Das Integral

$$u = \int^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int^{\zeta} \frac{\frac{1}{2}d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}}, \quad \varkappa = k^2,$$

nimmt in der Fläche T' jeden Werth u im Innern eines gewissen, im Allgemeinen krummlinigen Parallelogrammes einmal und nur einmal an. Ueberschreitet aber die Variabele einen Querschnitt von T', während u stetig fortgesetzt wird, und bleibt nun wieder in T', so ergeben sich für u Werthe, die wieder in einem dem ersten congruenten Parallelogramm liegen, welches mit dem ersten die jenem Querschnitte entsprechende Seite gemein hat, ihm benachbart ist. Wird die Variabele auch über den andern Querschnitt geführt, oder über beide beliebig oft und in jeder Richtung, so erhält man mehr und mehr Parallelogramme, welche die u-Ebene lückenlos bedecken, und so kann u auch über alle Grenzen wachsen, nämlich dadurch, dass σ, ζ unendlich oft über die Querschnitte geführt wird. Der Name „überall endliches Integral" bezieht sich demnach auf T', nicht auf T. Einem Punkte in T, der

für die obere Grenze in u genommen wird, entsprechen also unendlich viele Werthe der u-Ebene, die einander nach den Periodicitätsmoduln $2\pi_1$, $2\pi_2$ congruent sind, umgekehrt aber entspricht einem Werthe von u nur ein einziger Punkt in T, und es sind demnach die in T einwerthigen Functionen einwerthige Functionen von u, und ebenso die Integrale zweiter Gattung, die sich durch Thetafunctionen ausdrücken lassen werden. Die Integrale dritter Gattung aber lassen sich, wie sich zeigen wird, durch Logarithmen einwerthiger Functionen von u mit Hilfe der Thetafunctionen ausdrücken. Diese Darstellungen liefern wegen der vorzüglichen Convergenz der Thetareihen auch geeignete Hilfsmittel zur numerischen Auswerthung dieser Integrale, theoretisch aber ist es von Vortheil, dass diese Gebilde eben als einwerthige Functionen oder Logarithmen einwerthiger Functionen dargestellt werden.

Kann man nun aber sich nicht die Aufgabe stellen, auch die Integrale zweiter und dritter Gattung umzukehren? Die Untersuchung der Umkehrung solcher Integrale ist deshalb schwieriger, weil sie nicht mehr eindeutig ist. Es sei

$$t = \int \frac{(\zeta - b)\,d\zeta}{(\zeta - a)\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}}, \quad \frac{dt}{d\zeta} = \frac{\zeta - b}{(\zeta - a)\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}},$$

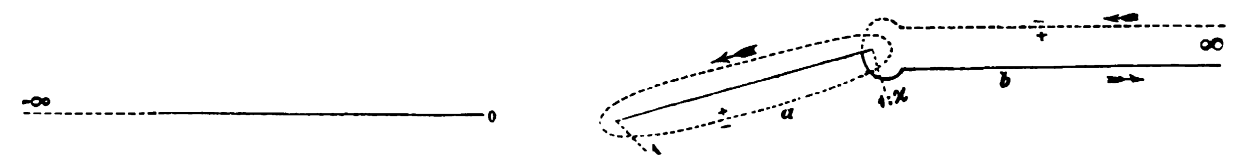
so ist t ein Integral zweiter, oder, wenn a nicht 0, 1 oder $1:\varkappa$ ist, ein Integral dritter Gattung, dessen Differentialquotient an den beiden über $\zeta = b$ liegenden Punkten der Fläche T verschwindet. Entwickelt man t nach Potenzen von $\zeta - b$, so folgt

$$t = a_0 + * + a_2(\zeta - b)^2 + a_3(\zeta - b)^3 + \ldots,$$

und es ist $\zeta - b$ nicht nach Potenzen von $t - a_0$ entwickelbar, sondern (vergl. § 28) nach Potenzen von $\sqrt{(t - a_0)}$; es ist also ζ als Function von t in der Umgebung des Punktes a_0 zweiwerthig, die Werthe von t bedecken die Umgebung des Punktes a_0 doppelt, woraus sich eben ergiebt, dass die Function ζ keine eindeutige Function von t ist. Hierdurch wird das Umkehrproblem für solche Integrale erheblich erschwert. Die über diesen Gegenstand bisher bekannt gemachten Untersuchungen können hier keinen Platz finden, es möge auf eine Arbeit von Casorati, Acta mathematica Bd. 8, verwiesen werden.

Wir treffen für das Folgende die Bestimmung, dass s, z sich auf den Bereich der Legendreschen Normalform, auf den Bereich (I.), σ, ζ sich auf den Bereich (II.) beziehe, und dass $u(s,z) = \int(1:s)\,dz = u(\sigma,\zeta) = \frac{1}{2}\int(1:\sigma)\,d\zeta$, $\varkappa = k^2$ sei.

§ 101. **Umkehrung des Integrales erster Gattung.** Die zum Bereich (II.), zu σ, ζ, gehörende Riemann'sche Fläche bedeckt die ζ-Ebene doppelt. Eine Durchsetzungslinie geht von 0 bis ins Unendliche längs der negativ reellen Achse, die zweite ist die gerade Verbindungslinie des Punktes 1 mit dem Punkte $1:\varkappa$. Der Fall, dass $\varkappa$ eine negativ reelle Zahl ist, würde eine Modification erfordern,



auf die hier keine Rücksicht genommen werden soll, da keine principiellen Schwierigkeiten vorhanden sind. Den Querschnitt a ziehen wir im untern Blatte (in der Richtung des Pfeiles), wir können denselben beliebig nahe (unendlich nahe) an die Durchsetzungslinie $1 \ldots 1:\varkappa$ herantreten lassen. Der Querschnitt b führt vom positiven Ufer von a um den Punkt $1:\varkappa$ herum ins obere Blatt, um den unendlich fernen Verzweigungspunkt ins untere Blatt zu dem dem Anfangspunkte auf dem negativen Ufer von a gegenüberliegenden Punkte zurück. Ist $\varkappa$ reell und kleiner als Eins, so können sich die Theile desselben im obern und untern Blatte beliebig nahe an die reelle Achse anschmiegen, in jedem Falle aber können diese beiden Theile in T übereinander liegen. Die Grössen $\sqrt{1-\zeta}$, $\sqrt{1-\varkappa\zeta}$ werden im obern Blatte von T so bestimmt, dass sie für $\zeta = 0$ den Werth Eins erhalten, $\sqrt{\zeta}$ aber so, dass die Wurzel im obern Blatte für reelle $\zeta > 1$ positiv ist. Dadurch ist die Zuordnung von σ zu den Blättern von T völlig bestimmt. Der Periodicitätsmodul von u bei a sei $2\pi_1$ oder $2K$, bei b aber $2\pi_2$ oder $2iK'$,

und u sei gleich Null für $\zeta = 0$. Vom Punkte 0 gelangt man in T' zum Punkte 1 nur im obern Blatte. Integrirt man $\frac{1}{2}\int(1:\sigma)d\zeta$ vom Verzweigungspunkte 1 (auf dem negativen Ufer von a) bis zu 1 (auf dem positiven Ufer von a) über einen Weg, der im untern Blatte beginnt, um den Punkt 0 herum ins obere Blatt führt, so kann man die Wegtheile in den verschiedenen Blättern einander congruent annehmen, so dass die Integrationselemente gleich sind, und dass man also das Doppelte des im obern Blatte von 0 bis 1 geradlinig erstreckten Integrals erhält. Dies Integral ist aber die Grösse, um welche u auf dem positiven Ufer grösser als auf dem negativen ist, und es ist demnach*)

$$u(0,1) = \frac{1}{2}\int_0^1(1:\sigma)d\zeta = K = \pi_1 = \frac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,\varkappa),$$

worin der letzte Ausdruck die bekannte Gauss'sche oder hypergeometrische Reihe bedeutet, die man erhält, wenn man unter dem Integralzeichen $(1-\varkappa\sigma)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt, und die Coefficienten als Euler'sche Integrale erster Art durch Facultäten darstellt. Dass das Integral über b das Doppelte dieses Ausdruckes negativ genommen liefert, folgt aus dem Cauchy'schen Satze. Es ist also in T' $u(0,1) = K = \pi_1$. Ist $\varkappa$ reell und kleiner als Eins, so ist σ bei dieser Integration positiv.

Das Integral über den Querschnitt a, der vom negativen Ufer von b aufs positive führt, ist $2\pi_2$ oder $2iK'$. Dasselbe ist das Doppelte desjenigen Integrales, welches im untern Blatte auf dem negativen Ufer der Durchsetzungslinie von 1 bis $1:\varkappa$ erstreckt wird, weil sich der Integrationsweg in zwei Strecken zerlegt, in denen σ entgegengesetzte, $d\zeta$ entgegengesetzte, und also die Integrationselemente gleiche Werthe haben. Für das negative Ufer der Durchsetzungslinie im untern Blatte kann auch das positive (obere) Ufer im oberen Blatte als Integrationsweg genommen werden. Es ist demnach in T' (auf dem positiven Ufer von a)

$$\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{d\zeta}{\sigma} = u(0,1:\varkappa) - u(0,1) = \pi_2 = iK', \quad \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{d\zeta}{\sigma} = u(0,1:\varkappa) = K + iK'.$$

Für ein reelles $\varkappa$ kleiner als Eins ist σ bei der Integration negativ imaginär, und daher iK' positiv imaginär. Durch die Substitution $\varkappa\zeta + \varkappa'\zeta' = 1$, $\varkappa + \varkappa' = 1$ ergiebt sich

$$\int_1^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\frac{1}{2}d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}} = \int_0^1\frac{\frac{1}{2}d\zeta'}{\sqrt{\zeta'(1-\zeta')(1-\varkappa'\zeta')}} = \frac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,\varkappa').$$

Das über b erstreckte Integral hat den Werth $-2K$, und da der Integrationsweg wiederum aus zwei in T übereinander liegenden Theilen besteht, in deren correspondirenden Punkten das Integrationselement denselben Werth hat, so ist es gleich dem im oberen Blatte von $1:\varkappa$ bis ∞ erstreckten Integrale $\frac{1}{2}\int(1:\sigma)d\zeta$. (Für reelle $\varkappa < 1$ ist dort σ negativ.) Es hat deshalb $u(\sigma,\zeta)$ im Punkte Unendlich in T (auf dem positiven Ufer von b) den Werth $K + iK' - K = iK' = \pi_2$. Die Auswerthung des Integrales $\frac{1}{2}\int(1:\sigma)d\zeta$ zwischen $1:\varkappa$ und ∞ liesse sich auch durch die Substitution $\zeta = 1:\varkappa\zeta'$ bewerkstelligen.

Sind nun $\Theta(u)$, $\Theta_{01}(u)$ u. s. w. Thetafunctionen, deren Modul $\tau = i\pi\pi_2:\pi_1 = -\pi K':K$, und deren Variabele u das überall endliche Integral $u(\sigma,\zeta)$ ist, so sind die Quotienten

$$\Theta_{11}(u):\Theta_{01}(u),\ \Theta_{10}(u):\Theta_{01}(u),\ \Theta(u):\Theta_{01}(u)$$

in T', ihre Quadrate aber in T einwerthige Functionen. Diese Quadrate werden in dem unendlich fernen Verzweigungspunkte von T unendlich gross zweiter Ordnung (weil nach § 92 eine Thetafunction da, wo sie in T verschwindet, unendlich klein erster Ordnung wird), also unendlich gross wie ζ. Das Quadrat des ersten Quotienten verschwindet im Punkte 0, das des zweiten im Punkte Eins, des dritten im Punkte $1:\varkappa$ in der zweiten Ordnung, und folglich sind diese Quadrate den Grössen ζ, $1-\zeta$, $1-\varkappa\zeta$, die Quo-

*) Die Reihe F convergirt nur so lange $abs\,\varkappa < 1$ ist. Für andere Werthe von $\varkappa$ bez. $\varkappa'$ sind die analytischen Fortsetzungen der durch sie definirten Functionen zu setzen. — Da sich die Querschnitte an 1, $1:\varkappa$, ∞ unendlich nahe anschmiegen, so kann man von einem Punkte 1 (u. s. w.) auf dem positiven und negativen Ufer von a sprechen.

tienten selbst den Functionen $\sqrt{\zeta}$, $\sqrt{1-\zeta}$, $\sqrt{1-\varkappa\zeta}$ proportional. Für $u=K$, $\zeta=1$ oder $u=0$, $\zeta=0$ ergeben sich die constanten Factoren, und man hat

$$\zeta=\frac{\Theta^2}{\Theta_{10}^2}\frac{\Theta_{11}^2(u)}{\Theta_{01}^2(u)}=sa^2(u),\quad 1-\zeta=\frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{01}^2}\frac{\Theta_{10}^2(u)}{\Theta_{01}^2(u)},\quad 1-\varkappa\zeta=\frac{\Theta_{01}^2}{\Theta^2}\frac{\Theta^2(u)}{\Theta_{01}^2(u)},\quad \varkappa=\frac{\Theta_{10}^4}{\Theta^4},\quad \varkappa'=\frac{\Theta_{01}^4}{\Theta^4},$$

$$\sqrt{\zeta}=sa\,u,\quad \sqrt{1-\zeta}=ca\,u,\quad \sqrt{1-\varkappa\zeta}=da\,u.$$

Dividirt man $\sqrt{\zeta}$ durch u und geht zur Grenze Null über, so erhält man den Werth 1. Es sind deshalb die Perioden $2K$, $2iK'$ solche, wie sie der § 55 vorschreibt.

Eine einwerthige Function von σ, ζ lässt sich als Quotient zweier Thetafunctionen mit dem Modul $\tau=i\pi\pi_2:\pi_1$ nicht darstellen, wohl aber durch Quadrate oder Producte solcher Quotienten. Hingegen sind zweiwerthige Functionen, die sich zu beiden Seiten der Querschnitte um Factoren ± 1 unterscheiden, wie eben gezeigt, wohl darstellbar.

§ 102. Umkehrung des überall endlichen Integrales im Bereiche I. Eine Zeichnung der wie s, z verzweigten Fläche T und ihrer Zerlegung in die einfach zusammenhängende T' findet sich für reelle $k<1$ in der angehängten Tafel unten rechts, für ein rein imaginäres k auf Seite 73, in der nur etwa die krummen Durchsetzungslinien d_1, d_2 durch gerade ersetzt werden könnten. Würde man die Function $u(s,z)$, die im obern Blatte für $z=0$, $s=1$ verschwindet, durch Θ-Functionen umkehren, deren Modul τ der mit $i\pi$ multiplicirte Quotient der Periodicitätsmoduln bei b und bei a, und deren Argument $u(s,z)$ wäre, so würde die Methode des vorigen Paragraphen ergeben, dass die Thetaquotienten den Quotienten der zweiwerthigen Functionen

$$\sqrt{1-z},\quad \sqrt{1+z},\quad \sqrt{1-kz},\quad \sqrt{1+kz}$$

proportional sind. Man kann jedoch in diesem Falle mittels Θ-Functionen, deren Modul τ der mit $i\pi$ multiplicirte Quotient des Periodicitätsmoduls bei b dividirt durch den halben Periodicitätsmodul bei a ist, die im Bezug auf die Periodicitätsmoduln bei a und b Thetafunctionen zweiter Ordnung sind, die einwerthige Function z selbst ausdrücken. Eine eingehendere Untersuchung in dieser Richtung ist aber nicht nöthig, erstens weil sie im Grunde in den Paragraphen 58 und 64 schon enthalten ist, und weil man zweitens zu den gewünschten Resultaten aus denen des vorigen Paragraphen durch Substitution gelangt.*) Denn setzt man $\zeta=z^2$, $\varkappa=k^2$, so folgt

$$u(\sigma,\zeta)=u(s,z),\quad z=sa\,u,\quad \sqrt{1-z^2}=ca\,u,\quad \sqrt{1-k^2z^2}=da\,u.$$

Die beiden letzten Functionen sind wieder zweiwerthige in T, ihr Product ergiebt $sa'u=ca\,u\,da\,u=s$.

---

*) Die Normalform des Integrales erster Gattung nach Herrn Weierstrass ist

$$\mathfrak{u}=I(\mathfrak{s},\mathfrak{z})=\int_{(\mathfrak{s},\mathfrak{z})}^{\infty}(d\mathfrak{z}:\mathfrak{s}),\quad \mathfrak{s}=\sqrt{4\mathfrak{z}^3-g_2\mathfrak{z}-g_3}=2\sqrt{(\mathfrak{z}-e_1)(\mathfrak{z}-e_2)(\mathfrak{z}-e_3)},$$

und das Integral wird durch die Gleichung $\mathfrak{z}=\wp(\mathfrak{u})$ umgekehrt. Um dies Integral auf die Normalform (II.) des Textes zu bringen, und $\wp$ durch sa auszudrücken, kann man die Substitution anwenden

$$\mathfrak{z}=\frac{e_2(e_3-e_1)-e_1(e_3-e_2)\zeta}{e_3-e_1-(e_3-e_2)\zeta}=\frac{e_2-e_1\varkappa\zeta}{1-\varkappa\zeta},\quad d\mathfrak{z}=\frac{(e_3-e_2)(e_3-e_1)(e_2-e_1)d\zeta}{(e_3-e_1-(e_3-e_2)\zeta)^2},$$

$$\varkappa=(e_3-e_2):(e_3-e_1),\quad \varkappa'=(e_2-e_1):(e_3-e_1),\quad e_2-\varkappa e_1=e_3(e_2-e_1):(e_3-e_1)=e_3\varkappa',$$

welche zu der Gleichung führt

$$\mathfrak{u}=\int_{(\mathfrak{s},\mathfrak{z})}^{\infty}\frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{s}}=\int_{(\sigma,\zeta)}^{1:\varkappa}\frac{\frac{1}{2}d\zeta}{\sigma\sqrt{e_1-e_3}}=\frac{K+iK'-u(\sigma,\zeta)}{\sqrt{e_1-e_3}},\quad u(\sigma,\zeta)=K+iK'-\sqrt{e_1-e_3}\,\mathfrak{u}.$$

Hieraus folgt (mit Hilfe der Gleichung XII) des § 55), da $\zeta=sa^2u(\sigma,\zeta)$ ist,

$$\wp(\mathfrak{u})=\mathfrak{z}=\frac{e_2-e_1\varkappa\,sa^2(K+iK'-\sqrt{e_1-e_3}\,\mathfrak{u})}{1-\varkappa\,sa^2(K+iK'-\sqrt{e_1-e_3}\,\mathfrak{u})}=\frac{e_2\,ca^2\sqrt{e_1-e_3}\,\mathfrak{u}-e_1\,da^2\sqrt{e_1-e_3}\,\mathfrak{u}}{ca^2\sqrt{e_1-e_3}\,\mathfrak{u}-da^2\sqrt{e_1-e_3}\,\mathfrak{u}}$$

$$=\frac{e_1-e_3}{sa^2\sqrt{e_1-e_3}\,\mathfrak{u}}+e_3.$$

Was die numerische Berechnung von $\mathfrak{u}$ aus einem gegebenen $\wp(\mathfrak{u})$ angeht, so spricht es gewiss nicht gegen die Le-

§ 103. **Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln.** Ein Integral zweiter Gattung, welches im Punkte $1:\varkappa$ in der ersten Ordnung unendlich wird und in T' eindeutig ist, erhält man durch Differentiation des Integrales erster Gattung nach dem Modul $\varkappa$. Es ist

$$\frac{\partial u}{\partial \varkappa} = \int_0^{\zeta} \frac{\frac{1}{4}\zeta\, d\zeta}{(1-\varkappa\zeta)\,\sigma(\zeta)}$$

eine in T' einwerthige Function, die im Punkte $1:\varkappa$ proportional $(1-\varkappa\zeta)^{-\frac{1}{2}}$ unendlich wird, sonst aber endlich bleibt. Zu beiden Seiten der Linien a und b sind die Werthe derselben bez. um die Grössen

$$\frac{2\partial K}{\partial \varkappa} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\zeta\, d\zeta}{(1-\varkappa\zeta)\,\sigma(\zeta)}, \quad 2i\frac{\partial K'}{\partial \varkappa} = -i\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\zeta' d\zeta'}{(1-\varkappa'\zeta')\,\sigma(\zeta')}$$

von einander verschieden.

Die Function $\frac{\partial^2 u}{\partial \varkappa^2}$ ist ebenfalls eine in T' einwerthige Function, die für $\zeta = 1:\varkappa$ proportional $(1-\varkappa\zeta)^{-\frac{3}{2}}$ unendlich wird, sonst aber endlich bleibt, und bei a den Periodicitätsmodul $2\frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2}$, bei b den Periodicitätsmodul $2i\frac{\partial^2 K'}{\partial \varkappa^2}$ besitzt.

Setzt man

$$\Delta(\zeta) = \begin{vmatrix} u, & \frac{\partial u}{\partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 u}{\partial \varkappa^2} \\ K, & \frac{\partial K}{\partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \\ K', & \frac{\partial K'}{\partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 K'}{\partial \varkappa^2} \end{vmatrix},$$

so ist $\Delta(\zeta)$ eine in T einwerthige Function. Denn für die Werthe von u, die sich um Multipla der Periodicitätsmoduln $2K$, $2iK'$ unterscheiden, erhält man eine Determinante, die von der ursprünglichen nur dadurch verschieden ist, dass die Terme der ersten Horizontalreihe um gleiche Vielfache der entsprechenden Terme der zweiten Horizontalreihe oder der dritten Horizontalreihe oder beider vermehrt erscheinen, wodurch die Determinante selbst ihren Werth nicht ändert. Diese Function $\Delta(\zeta)$ ist mithin eine rationale Function von ζ und σ, die im Punkte $1:\varkappa$ wie Const. $(1-\varkappa\zeta)^{-\frac{3}{2}}$ unendlich wird, sonst aber endlich bleibt. Für $\zeta = 0$ verschwindet $\Delta(\zeta)$, weil die erste Horizontalreihe verschwindet. Für $\zeta = 1$ verschwindet $\Delta(\zeta)$ ebenfalls, weil da die beiden ersten Horizontalreihen einander gleich werden. Es kann deshalb $\Delta(\zeta) = \frac{1}{2}\sigma\,.\,(\alpha + \beta\zeta):(1-\varkappa\zeta)^2$ gesetzt werden. Hierin muss aber $\beta = 0$ sein, weil $\Delta(\zeta)$ für $\zeta = \infty$ auch noch verschwindet, denn dort werden die Terme der ersten und dritten Reihe einander proportional. Also hat man

$$\Delta(\zeta) = \alpha\frac{\frac{1}{2}\sigma}{(1-\varkappa\zeta)^2}.$$

Nun werde

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial K}{\partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \\ \frac{\partial K'}{\partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 K'}{\partial \varkappa^2} \end{vmatrix} = \alpha A, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2}, & K \\ \frac{\partial^2 K'}{\partial \varkappa^2}, & K' \end{vmatrix} = \alpha B, \quad \begin{vmatrix} K, & \frac{\partial K}{\partial \varkappa} \\ K', & \frac{\partial K'}{\partial \varkappa} \end{vmatrix} = \alpha C$$

gesetzt, so ist

$$\Delta(\zeta):\alpha = uA + \frac{\partial u}{\partial \varkappa}B + \frac{\partial^2 u}{\partial \varkappa^2}C = \frac{\frac{1}{2}\sigma}{(1-\varkappa\zeta)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta(1-\zeta)}{(1-\varkappa\zeta)^3}},$$

---

gendre'sche Normalform, wenn man bemerkt, dass die Formelsammlung Schwarz-Weierstrass diese dadurch bewerkstelligt, dass sie die Weierstrass'sche Normalform in verschiedenen Fällen durch verschiedene, z. B. durch die Substitution

$$\frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}-\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_1-e_2}} = k, \quad \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt{\mathfrak{z}-e_2}-\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt{\mathfrak{z}-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt{\mathfrak{z}-e_2}+\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt{\mathfrak{z}-e_3}} = kz,$$

(auf Seite 71) erst auf die **Legendre'sche Normalform** bringt.

und wenn man diese Gleichung nach ζ differenzirt und mit 2 multiplicirt,

$$\frac{A}{\sigma}+\frac{\frac{1}{2}\zeta B}{(1-\varkappa\zeta)\sigma}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\zeta^2 C}{(1-\varkappa\zeta)^2\sigma}=\frac{(1-\varkappa\zeta)(1-2\zeta)+3\varkappa\zeta(1-\zeta)}{2\sigma(1-\varkappa\zeta)^2}$$

oder

$$(1-\varkappa\zeta)^2 A+\tfrac{1}{2}\zeta(1-\varkappa\zeta)B+\tfrac{3}{4}\zeta^2 C=\tfrac{1}{2}(1+\zeta(2\varkappa-2)-\zeta^2\varkappa).$$

Für $\zeta=0$ folgt hieraus $A=\frac{1}{2}$, für $\zeta=1:\varkappa$ folgt $C=2\varkappa(\varkappa-1)$, und vergleicht man die Coefficienten von ζ^2, so folgt

$$\varkappa^2 A-\tfrac{1}{2}\varkappa B+\tfrac{3}{4}C=-\tfrac{1}{2}\varkappa,\quad B=\varkappa+3(\varkappa-1)+1=2(2\varkappa-1).$$

Hieraus entspringt für u die Differentialgleichung

$$\varkappa(\varkappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial\varkappa^2}+(2\varkappa-1)\frac{\partial u}{\partial\varkappa}+\tfrac{1}{4}u=\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\zeta(1-\zeta)}{(1-\varkappa\zeta)^3}}.$$

Für $\zeta=1$ oder $\zeta=\infty$ wird die rechte Seite 0, und u geht in K oder iK' über. Demnach sind K und K' particuläre Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$4\varkappa(\varkappa-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\varkappa^2}+4(2\varkappa-1)\frac{\partial\omega}{\partial\varkappa}+\omega=0,$$

oder wenn $\varkappa=k^2$ gesetzt wird,

$$k(1-k^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}+(1-3k^2)\frac{\partial\omega}{\partial k}-k\omega=0.$$

Eine hieraus fliessende Darstellung von u durch bestimmte Integrale habe ich in Schlömilch's Zeitschrift XXIII, Seite 409 gegeben.

§ 104. **Verhalten des Moduls τ in der Umgebung der Stelle $\varkappa=0$.** Es werde zur Abkürzung

$$\zeta^\lambda(1-\zeta)^\mu(1-\varkappa\zeta)^\nu=\varphi,$$

$$\lambda=-\alpha'-\beta-\gamma',\ \mu=-\alpha'-\beta'-\gamma,\ \nu=-\alpha-\beta-\gamma,\ \lambda+\mu+\nu=-1-\alpha'-\beta-\gamma,$$

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$$

gesetzt, worin die $\alpha,\beta,\ldots\gamma'$ an sich beliebige Grössen sind, hier aber der Einfachheit halber in ihren reellen Theilen alle positiv und kleiner als Eins angenommen werden. Unter dieser Voraussetzung lässt sich das Integral, dessen Integrand φ ist, bis zu jedem der Punkte 0, 1, $1:\varkappa$, ∞ ohne Weiteres erstrecken, während im allgemeinen Falle sich gewisse Modificationen nothwendig machen. (Vergl. Schlömilch's Zeitschrift XIV, pag. 51.) Ferner nehmen wir vorläufig an, dass $\varkappa$ nicht auf positiv reelle Werthe zwischen 1 und ∞ falle. Die Ebene, welche Träger der Zahlen ζ ist, zerschneiden wir durch eine knotenlose Linie l, deren erstes Stück l_1 von 0 bis 1 geradlinig verläuft, deren zweiter Theil l_2 die Punkte 1 und $1:\varkappa$ geradlinig (wenn $\varkappa$ nicht negativ reell ist, in welchem Falle man eine krumme Linie nehmen muss) verbindet, deren drittes Stück l_3 von $1:\varkappa$ (etwa geradlinig) so ins Unendliche läuft, dass l_3 die Stücke l_1 und l_2 nicht trifft.

Die Functionen

$$\zeta^\lambda=e^{\lambda\,lg\,\zeta},\ (1-\zeta)^\mu=e^{\mu\,lg(1-\zeta)},\ (1-\varkappa\zeta)^\nu=e^{\nu\,lg(1-\varkappa\zeta)}$$

sind in der so begrenzten Ebene eindeutig, und völlig bestimmt, wenn noch hinzugefügt wird, dass $lg\,\zeta$ und $lg(1-\zeta)$ auf dem obern, positiven Ufer von l_1 reell, und $lg(1-\varkappa\zeta)$ für $\zeta=0$ Null sein soll. Alsdann führen wir die Abkürzungen ein:

$$(\varkappa'=1-\varkappa),\quad \varkappa^\alpha\varkappa'^\gamma\int_0^1\varphi\,d\zeta=P^\alpha,\quad \varkappa^\alpha\varkappa'^\gamma\int_1^{(1:\varkappa)}\varphi\,d\zeta=P^{\gamma'},\quad \varkappa^\alpha\varkappa'^\gamma\int_{(1:\varkappa)}^\infty\varphi\,d\zeta=P^{\alpha'},$$

$$\varkappa^\alpha\varkappa'^\gamma\int_0^{(1:\varkappa)}\varphi\,d\zeta=P^{\beta'},\quad \varkappa^\alpha\varkappa'^\gamma\int_0^\infty\varphi\,d\zeta=P^\gamma,\quad \varkappa^\alpha\varkappa'^\gamma\int_1^\infty\varphi\,d\zeta=P^\beta,$$

worin die Integrale über die positiven Ufer der Linien l_1, l_2, l_3 zu erstrecken sind. Sollen diese Integrale über die negativen Ufer der Linien l erstreckt werden, so ist zu beachten, dass zwischen dem Werthe φ^+ von φ auf dem positiven Ufer von l_1, l_2, l_3 und dem Werthe φ^- von φ auf dem negativen Ufer von l_1, l_2, l_3 bez. die Gleichungen bestehen

$$\varphi^-=e^{2\lambda i\pi}\varphi^+,\quad \varphi^-=e^{2(\lambda+\mu)i\pi}\varphi^+,\quad \varphi^-=e^{2(\lambda+\mu+\nu)i\pi}\varphi^+.$$

Ohne Weiteres kann die Beziehung hingeschrieben werden

$$\text{I)}\ \int_1^\infty \varphi\, d\zeta = \int_1^{1:\varkappa} \varphi\, d\zeta + \int_{1:\varkappa}^\infty \varphi\, d\zeta, \quad P^\beta = P^{\gamma'} + P^{\alpha'}.$$

Das Integral $\int \varphi\, d\zeta$ über die ganze Begrenzung der ζ-Ebene, d. h. über die beiden Ufer der Linie l erstreckt, hat nach dem Cauchy'schen Satze den Werth Null, woraus durch Zerlegung des Integrales in solche über die Theilstrecken l_1, l_2, l_3 genommene folgt

$$(1-e^{2\lambda i\pi})\int_0^1 \varphi\, d\zeta + (1-e^{2(\lambda+\mu)i\pi})\int_1^{1:\varkappa} \varphi\, d\zeta + (1-e^{2(\lambda+\mu+\nu)i\pi})\int_{1:\varkappa}^\infty \varphi\, d\zeta = 0,$$

und hieraus mit Hilfe der Gleichung

$$\int_1^{1:\varkappa} \varphi\, d\zeta = \int_1^\infty \varphi\, d\zeta - \int_{1:\varkappa}^\infty \varphi\, d\zeta = \varkappa^{-\alpha}\varkappa'^{-\gamma}(P^\beta - P^{\alpha'}):$$

$$(1-e^{2\lambda i\pi})P^\alpha + (1-e^{2(\lambda+\mu)i\pi})P^\beta + e^{2(\lambda+\mu)i\pi}(1-e^{2\nu i\pi})P^{\alpha'} = 0.$$

Eliminirt man hieraus mit Hilfe von I) P^β, so folgt weiter

$$\text{II)}\ P^{\gamma'} = -\frac{1-e^{2\lambda i\pi}}{1-e^{2(\lambda+\mu)i\pi}}P^\alpha - \frac{1-e^{2(\lambda+\mu+\nu)i\pi}}{1-e^{2(\lambda+\mu)i\pi}}P^{\alpha'} = -\frac{e^{-\mu i\pi}\sin\lambda\pi}{\sin(\lambda+\mu)\pi}P^\alpha - \frac{e^{\nu i\pi}\sin(\lambda+\mu+\nu)\pi}{\sin(\lambda+\mu)\pi}P^{\alpha'}.$$

Das Integral $P^{\gamma'}$ geht durch Substitution von $1:(1-\varkappa'\zeta)$ für ζ über in

$$e^{-\mu i\pi}\varkappa^\alpha\varkappa'^{\gamma'}\int_0^1 \zeta^\mu(1-\zeta)^\nu(1-\varkappa'\zeta)^{-(\lambda+\mu+\nu+2)}d\zeta,$$

und das Integral $P^{\alpha'}$ durch die Substitution $1:\varkappa\zeta$ für ζ in das Integral

$$e^{-(\mu+\nu)i\pi}\varkappa^{\alpha'}\varkappa'^{\gamma}\int_0^1 \zeta^{-(\lambda+\mu+\nu+2)}(1-\zeta)^\nu(1-\varkappa\zeta)^\mu d\zeta.$$

Dies in die Gleichung II) eingesetzt giebt

$$\text{III)}\ \varkappa^\alpha\varkappa'^{\gamma'}\int \zeta^\mu(1-\zeta)^\nu(1-\varkappa'\zeta)^{-(\lambda+\mu+\nu+2)}d\zeta =$$
$$-\frac{\sin\lambda\pi}{\sin(\lambda+\mu)\pi}\varkappa^\alpha\varkappa'^\gamma\int_0^1 \zeta^\lambda(1-\zeta)^\mu(1-\varkappa\zeta)^\nu d\zeta - \frac{\sin(\lambda+\mu+\nu)\pi}{\sin(\lambda+\mu)\pi}\varkappa^{\alpha'}\varkappa'^\gamma\int_0^1 \zeta^{-(\lambda+\mu+\nu+2)}(1-\zeta)^\nu(1-\varkappa\zeta)^\mu d\zeta.$$

Nun werde $\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)} = \sigma$, $\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa'\zeta)} = \sigma'$, $\alpha = 0$, $\gamma' = 0$, $\beta = \beta' = \frac{1}{2}$ gesetzt, so folgt $\alpha'+\gamma = 0$, $\lambda = -\alpha' - \frac{1}{2}$, $\mu = -\frac{1}{2}$, $\nu = -\frac{1}{2}-\gamma$, $\lambda+\mu+\nu+2 = \frac{1}{2}$, und hiermit aus III), wenn man noch mit $\varkappa'^\gamma$ dividirt,

$$\int_0^1 \frac{(1-\zeta)^{-\gamma}}{\sigma'}d\zeta = \frac{\sin(\frac{1}{2}+\alpha')\pi}{\sin\alpha'\pi}\int_0^1 \frac{\zeta^{-\alpha'}(1-\varkappa\zeta)^{-\gamma}}{\sigma}d\zeta - \frac{\varkappa^{\alpha'}\sin\frac{1}{2}\pi}{\sin\alpha'\pi}\int_0^1 \frac{(1-\zeta)^{-\gamma}}{\sigma}d\zeta.$$

Lassen wir hierin α' $(=-\gamma)$ zur Grenze Null übergehen, so finden wir

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sigma'} = 2K' = \frac{1}{\pi}\int_0^1 lg\frac{1-\varkappa\zeta}{\zeta}\frac{d\zeta}{\sigma} - \frac{lg\varkappa}{\pi}\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sigma} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{lg\,1-\zeta}{\sigma}d\zeta,$$

$$\text{IV)}\ K' = -\frac{K\,lg\varkappa}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 lg\frac{1-\varkappa\zeta}{\zeta(1-\zeta)}\cdot\frac{d\zeta}{\sigma}.$$

Der Ausdruck $\Phi(\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (lg(1-\varkappa\zeta) - lg\,\zeta(1-\zeta))\frac{d\zeta}{\sigma}$ lässt sich, so lange $abs\,\varkappa < 1$ ist, nach Potenzen von $\varkappa$ entwickeln, und das Anfangsglied hat den Werth

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{lg\,\zeta(1-\zeta)d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{lg\,\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}d\zeta = -\frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{lg\,z}{\sqrt{1-z^2}}dz = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} lg\sin x\,dx = \frac{2\,lg\,2}{\pi}.$$

Man schliesst weiter $\quad \text{V)}\ \tau = -\pi K':K = lg\varkappa + \Psi(\varkappa),\ \Psi(\varkappa) = -\pi\Phi(\varkappa):K,$

und da K im Einheitskreise um Null den Charakter einer ganzen Function hat, die nach § 91 nicht

verschwindet, so lässt sich auch $-\pi\Phi(\varkappa):K = \Psi(\varkappa)$ im Einheitskreise nach Potenzen von $\varkappa = k^2$ entwickeln, und die Entwickelung beginnt mit $-4lg2 = -lg16$, weil die von K mit $\frac{1}{2}\pi$ beginnt. Daraus ergeben sich für q und $\sqrt[4]{q}$ Entwickelungen von der Form

$$q = \tfrac{1}{16}\varkappa + l_2\varkappa^2 + l_3\varkappa^3 + \ldots = \tfrac{1}{16}k^2 + l_2k^4 + l_3k^6 + \ldots,$$

$$\sqrt[4]{q} = \tfrac{1}{2}\sqrt{k} + c_1(\sqrt{k})^5 + c_2(\sqrt{k})^9 + c_3(\sqrt{k})^{13} + \ldots,$$

welche Reihen im Einheitskreise convergiren. Lässt man q in q^4 übergehen, so geht $\sqrt{k}$ nach § 74 in $(1-\sqrt{k'}):(1+\sqrt{k'})$ über und so finden wir, dass

$$q = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} + c_1\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^5 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^9 + \ldots,$$

also die Reihe I) des § 71, convergirt, so lange $abs((1-\sqrt{k'}):(1+\sqrt{k'})) < 1$ ist, was dort noch bewiesen zu werden versprochen wurde.

§ 105. Abbildung der $\varkappa$-Ebene in die τ-Ebene. Aus der Darstellung des Moduls τ durch bestimmte Integrale,

$$\tau = -\pi K':K = -\pi\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa'\zeta)}} : \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}},$$

ergiebt sich sofort, dass τ als Function von $\varkappa$ überall den Charakter einer ganzen analytischen Function hat, mit Ausnahme der Stellen 0, 1, ∞. Das Verhalten dieser Function im Punkte Null ist aus dem vorigen Paragraphen bekannt. Im Punkte Eins aber findet man das Verhalten von τ aus der Bemerkung, dass sich K, K' durch $\varkappa$ genau so ausdrücken, als K', K durch $\varkappa'$, woraus folgt

$$\tau = -\pi K':K = lg\varkappa + \Psi(\varkappa) = \pi^2:(-\pi K:K') = \pi^2:(lg\varkappa' + \Psi(\varkappa')).$$

Eine Ebene S, welche die Werthe von $\varkappa$ repräsentirt, zerschneiden wir durch eine Linie l, die aus zwei Theilen, l_1, l_2, besteht; l_1 führt von 1 längs der positiv reellen Achse ins Unendliche, das obere Ufer l_1^+ ist das positive, l_2 führt vom Punkte Unendlich längs der negativ reellen Achse zum Punkte Null, das obere Ufer l_2^+ ist das positive. Die Halbebene oberhalb dieser Linie werde mit S_o, die andere mit S_u, die ganze durch l zerschnittene Ebene mit S' bezeichnet. Führen wir $\varkappa$ um den Punkt Null herum vom negativen Ufer von l_2 aufs positive, so wächst $lg\varkappa$ um $2i\pi$, es ist also τ bei l_2^+ um $2i\pi$ grösser als bei l_2^-. Führen wir $\varkappa$ um den Punkt 1 herum vom negativen Ufer von l_1 aufs positive, so geht τ in $\pi^2:(-2i\pi + lg\varkappa' + \Psi(\varkappa')) = \pi^2:(-2i\pi + \pi^2:\tau) = i\pi\tau:(2\tau + i\pi)$ über. Es geht also bez.

$$\tau \text{ in } \tau + i\pi, \quad \tau \text{ in } i\pi\tau:(2\tau + i\pi)$$

über, wenn man $\varkappa$ über eine Schlinge positiv herum um 0, negativ herum um 1 führt. Führt man aber $\varkappa$ um beide Punkte beliebig oft in beliebigen Richtungen herum von einem Anfangswerthe zu diesem zurück, so gelangt man zu Werthen von τ, welche sich aus diesen Substitutionen und den entgegengesetzten zusammensetzen lassen, und gelangt so zu Werthen, die in der Form

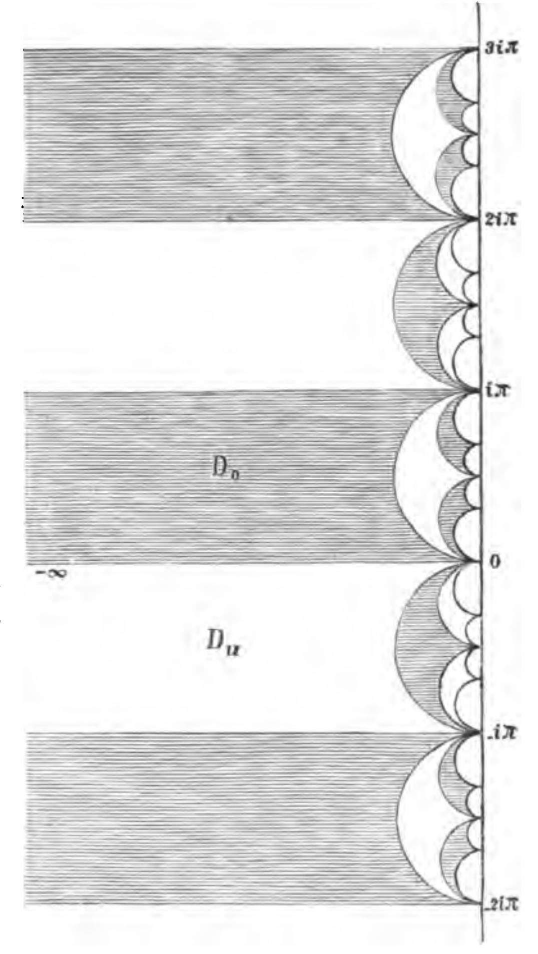
$$i\pi(\alpha\tau + \beta i\pi):(\gamma\tau + \delta i\pi)$$

enthalten sind, worin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze positive oder negative Zahlen sind, die nur der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \ \beta \equiv 0, \ \gamma \equiv 0 \ (\text{mod. } 2)$$

unterworfen sind. Nun bilden wir die Halbebene S_o auf die τ-Ebene durch die Beziehung $\tau = \tau(\varkappa)$ ab, und zwar zunächst die Begrenzung. Machen wir von der im Paragraphen 107 zu erweisenden Relation $d\tau:d\varkappa = \pi^2:4\varkappa\varkappa'K^2$ Gebrauch, welche lehrt, dass für positiv reelle $\varkappa$ der Differentialquotient $d\tau:d\varkappa$ stets positiv ist, dass also τ mit $\varkappa$ fortwährend wächst, und beachten, dass τ für $\varkappa = 0$ negativ unendlich, für $\varkappa = 1$ aber Null ist, so finden wir, dass sich die Strecke von 0 bis 1 der $\varkappa$-Ebene ein-eindeutig auf die negativ reelle Achse von $-\infty$ bis 0 abbildet. Durchläuft $\varkappa$ die Linie l_2^+ von 0 bis $-\infty$, so ist anfänglich $\tau = i\pi + lg(-\varkappa) + \Psi(\varkappa)$ und der reelle Theil negativ sehr gross, der imaginäre Theil ist constant gleich $i\pi$. Der Differentialquotient $d\tau:d\varkappa$ aber ist dort fortwährend negativ, der reelle Theil von τ nimmt daher fortwährend zu, wenn $\varkappa$ abnimmt, und es bildet sich die Linie von 0 bis $-\infty$ der

$\varkappa$-Ebene auf die Gerade der τ-Ebene ab, welche vom Punkte Unendlich bis zum Punkte $i\pi$ parallel der negativ reellen Achse gezogen ist.



Führt man $\varkappa$ in der Nähe des Punktes 1, wo $\tau = \pi^2 : (lg\varkappa' + \Psi(\varkappa'))$ ist, von einem positiven Werthe von $\varkappa < 1$ zu einem positiven Werthe von $\varkappa > 1$ auf dem positiven Ufer von l_1, negativ um 1 herum, so geht τ in

$$\pi^2 : (-i\pi + lg(-\varkappa') + \Psi(\varkappa')) = \pi^2 : (-i\pi + \lambda)$$

über, wo λ reell ist. Hieraus ergiebt sich, dass man in der Formel III) des § 70 $\alpha = \gamma = \delta = 1$, $\beta = 0$ setzen muss, um den hierher gehörenden Werth von τ zu erhalten, der der Transformation von $\varkappa$ in $1 : \varkappa$ entspricht. Ist τ der Werth, welcher zum Punkte $\varkappa > 1$ gehört, und τ' der, welcher zu $1 : \varkappa$ gehört, so ist $\tau = i\pi\tau' : (\tau' - i\pi)$. Wächst nun $\varkappa$ von 1 bis ∞, nimmt also $1 : \varkappa$ von 1 bis 0 ab, so durchläuft τ' alle reellen Werthe von 1 bis $-\infty$, und in dem Ausdruck

$$\tau - \tfrac{1}{2} i\pi = \tfrac{1}{2} i\pi(\tau' + i\pi) : (\tau' - i\pi)$$

ist der absolute Betrag fortwährend $\frac{1}{2}\pi$, woraus folgt, dass τ einen Halbkreis durchläuft, der den Radius $\frac{1}{2}\pi$, den Mittelpunkt $-\frac{1}{2} i\pi$ hat und vom Punkte 0 beginnt, in dem Theile der τ-Ebene liegt, in der der reelle Theil dieser Grösse **negativ** ist, und im Punkte $i\pi$ endet. Der Begrenzung von S_o entspricht also in der τ-Ebene ein Dreieck D_o, dessen Winkel sämmtlich Null sind. Die Ecken sind $-\infty$, 0, $i\pi$, zwei Seiten, von $-\infty$ bis 0 und von $-\infty$ bis $i\pi$, sind gerade Linien, die dritte Seite von 0 bis $i\pi$ ist ein Halbkreis.

Aber auch das Innere von S_o bildet sich ein-eindeutig auf das Innere von D_o ab. Denn da $d\tau : d\varkappa$ nirgend verschwindet, so ist die Function $\tau = \tau(\varkappa)$ für jeden Werth $\varkappa_0$ in S_o durch eine nach ganzen Potenzen fortschreitende Reihe von $\varkappa - \varkappa_0$ umkehrbar; $\varkappa$ besitzt als Function von τ keine Verzweigungsstelle, die einem Punkte im Innern von S_o entspricht. Wegen der Winkeltreue kann aber das Gebiet der τ-Ebene, welches der Halbebene entspricht, keine andere Begrenzung haben, als die der Begrenzung der Halbebene entsprechende, und es müssen daher die S_o entsprechenden Werthe von τ das Dreieck D_o lückenlos bedecken. Die untere Halbebene S_u enthält die Zahlen, die den in S_o enthaltenen conjugirt sind, und da S_o und S_u längs der reellen Linie, die der negativ reellen Achse in τ entspricht, zusammenhängen, so entspricht S_u dem Dreieck D_u, welches D_o congruent ist und die D_o conjugirten Zahlen enthält. Die Ebene S' entspricht demnach einem Viereck, dessen Winkel sämmtlich Null sind. Zwei Seiten sind gerade Linien, parallel der negativ reellen Achse, von $-\infty$ bis $i\pi$ und von $-\infty$ bis $-i\pi$. Die beiden andern Seiten sind Halbkreise, über $-i\pi$, 0 und 0, $i\pi$. Durch die Substitution τ in $\tau + 2i\pi$ geht die eine gerade Seite in die andere gerade Seite über, und durch die Substitution τ in $i\pi\tau : (2\tau + i\pi)$ der eine begrenzende Halbkreis in den andern, der untere in den obern. Wiederholt man die Substitution τ in $\tau + 2i\pi$ und ihre inverse, so dass τ in $\tau - 2i\pi, \tau + 4i\pi, \ldots$ übergeht, so erhält man übereinanderliegende congruente Figuren, von denen die obenstehende Zeichnung einige giebt. Die S_o entsprechenden Dreiecke sind schattirt, die S_u entsprechenden hell gelassen. Verwandelt man aber τ in $i\pi\tau : (2\tau + i\pi)$ und wiederholt diese Substitution und ihre inverse, so erhält man aus $D_o + D_u$ Bilder, deren Begrenzungen durch Kreisspiegelung in Bezug auf die kreisförmigen Seiten sich ergeben. Eine Figur ist aber in Bezug auf einen Kreis das Spiegelbild, wenn sie in Bezug auf diesen Kreis durch die Möbius'sche Kreisverwandtschaft, durch reciproke radii vectores abgebildet wird. Vervielfältigt man die Dreiecke nach

diesem Gesetze, so erhält man eine unendlich grosse Zahl derselben, welche die eine Hälfte der τ-Ebene lückenlos bedecken, aber niemals auf die Halbebene, in der der reelle Theil von τ positiv ist, hinübergehen. Ihre Spitzen liegen alle auf der imaginären Achse und drängen sich dort in jedem Punkte, der Träger einer rationalen Zahl multiplicirt in $i\pi$ ist, zu unendlich vielen zusammen. In der Figur sind einige der Dreiecke gezeichnet, die beliebig vermehrt werden können. Sie haben alle die Winkel Null, und die schattirten entsprechen der Ebene S_o, wenn $\varkappa$ über l_1 oder l_2 hinweg beliebig oft dorthin geführt wird.

Die Invariante $I = (\varkappa^2 - \varkappa + 1)^3 : 27\varkappa^2\varkappa'^2$ bleibt ungeändert, wenn $\varkappa$ in $1:\varkappa$ oder $\varkappa'$ verwandelt wird, oder wenn τ in $\tau + i\pi$ und τ in $-\pi^2 : \tau$, und also wenn τ in $i\pi(\alpha\tau + \beta i\pi) : (\gamma\tau + \delta i\pi)$ verwandelt wird, wo die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nur der Bedingung $\alpha\beta - \gamma\delta = 1$ unterworfen sind. Diese Grösse bildet die I-Ebene in der τ-Ebene auf eine Figur ab, welche von zwei zur negativ reellen Achse parallelen, durch die Punkte $\frac{1}{2}i\pi$, $-\frac{1}{2}i\pi$ gehenden geraden Linien und von dem über der Strecke $-i\pi$ bis $+i\pi$ stehenden Halbkreise von aussen begrenzt ist. Man vergleiche F. Klein, mathem. Annalen 14 pag. 117; Dedekind, Crelle's Journal Bd. 83; Weierstrass, Berliner Sitzungsberichte 1883.

Für die Function $\varkappa(\tau)$ ist die imaginäre Achse der τ-Ebene eine natürliche Grenze, über welche hinaus sie analytisch nicht fortgesetzt werden kann, weil die singulären Stellen derselben auf jener Linie unendlich dicht sind. Vergl. § 31.

§ 106. **Das Additionstheorem der Function $u(s, z)$.** Man versteht unter dem Additionstheorem des überall endlichen Integrales die Lösung der Aufgabe, aus zwei Werthepaaren s_1, z_1; s_2, z_2 ein drittes s, z zu finden, welches die Congruenz befriedigt $u(s, z) \equiv u(s_1, z_1) + u(s_2, z_2)$. Es werde

$$u(s_1, z_1) = u_1, \quad u(s_2, z_2) = u_2, \quad u(s, z) = u$$

gesetzt. Dann ist

$$z = sa\,u = sa(u_1 + u_2) = (sa\,u_1\, sa'u_2 + sa\,u_2\, sa'u_1) : (1 - k^2 sa^2u_1\, sa^2u_2) = (z_1 s_2 + z_2 s_1) : (1 - k^2 z_1^2 z_2^2)$$

und damit ist z gefunden. Es muss aber noch der zugehörige Werth $s = sa'u$ gefunden werden. Dies geschieht wie folgt. Es ist

$$sa'u = sa'(u_1 + u_2) =$$

$$ca(u_1 + u_2)\, da(u_1 + u_2) = \frac{ca\,u_1\, ca\,u_2 - sa\,u_1\, sa\,u_2\, da\,u_1\, da\,u_2}{1 - k^2 sa^2u_1\, sa^2u_2} \cdot \frac{da\,u_1\, da\,u_2 - k^2 sa\,u_1\, ca\,u_1\, sa\,u_2\, ca\,u_2}{1 - k^2 sa^2u_1\, sa^2u_2}$$

$$= \frac{sa'u_1\, sa'u_2(1 + k^2 sa^2u_1\, sa^2u_2) - sa\,u_1\, sa\,u_2(1 + k^2 + k^2(1+k^2) sa^2u_1\, sa^2u_1 - 2k^2(sa^2u_1 + sa^2u_2))}{(1 - k^2 sa^2u_1\, sa^2u_2)^2},$$

$$s = (s_1 s_2(1 + k^2 z_1^2 z_2^2) - z_1 z_2(1 + k^2 - 2k^2(z_1^2 + z_2^2)) + k^2(1+k^2) z_1^2 z_2^2) : (1 - k^2 z_1^2 z_2^2)^2,$$

und damit ist s eindeutig bestimmt.*)

§ 107. **Der Abel'sche Satz. Satz über die Periodicitätsmoduln der Integrale zweiter Gattung.** Die Summe der Werthe von u in Punkten, in denen eine Function des Bereiches σ, ζ (oder auch s, z) denselben Werth a annimmt, ist von diesem Werthe a unabhängig, einer Constanten nach den Periodicitätsmoduln des Integrales congruent. Es ist $\Sigma u_a \equiv \Sigma u_\infty$, wenn die eine Summe sich über alle Werthe u_a erstreckt, in denen $f = a$ ist, und die andere über alle Werthe u_∞, in denen $f = \infty$ ist. Dieser Satz kann mittels des § 38 erwiesen werden. Setzt man nämlich

$$\zeta = sa^2u = \varphi(u), \quad \sigma = sa\,u\, sa'u = \tfrac{1}{2}\varphi'(u),$$

so wird $f(\frac{1}{2}\varphi'(u), \varphi(u))$ eine doppeltperiodische Function, deren Perioden die Periodicitätsmoduln von u sind. Nach § 38 ist die Summe der Werthe ihres Argumentes, für welches sie gleich a wird, gleich der Summe der Werthe ihres Argumentes, für welches sie gleich ∞ wird, w. z. b. w. — Die Summe der Werthe

---

*) Herr Weierstrass hat den schönen Satz gegeben: Jede transcendente eindeutige analytische Function, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzt, ist nothwendig eine periodische, und zwar entweder eine einfach periodische oder eine doppelt periodische Function ihres Argumentes. Von diesem Satze findet sich ein Beweis vor von Phragmen: Acta mathematica Band 7 pag. 33. Derselbe lässt sich, worauf Gewicht gelegt wird, an die Spitze der Theorie der doppelt periodischen Functionen stellen, jedoch wohl nicht in dem Sinne, dass er als eine Hauptquelle für die Entwickelung der Theorie dieser Functionen anzusehen sei. Wenigstens ist ein Einfluss dieses Satzes auf jene Entwickelung mir bisher nicht bekannt geworden.

von $u(\sigma,\zeta)$, für welche ζ einen gegebenen Werth hat, ist congruent Null. Die Summe der Werthe von $u(s,z)$, für welche z einen gegebenen Werth hat, ist congruent $2K$,

$$u(\sigma,\zeta)+u(-\sigma,\zeta)\equiv 0\ (2K, 2iK'),\quad u(s,z)+u(-s,z)\equiv 2K\ (4K, 2iK').$$

Der im § 38 gegebene Beweis lässt sich unmittelbar vom Periodenparallelogramm durch Abbildung auf die Fläche T^* übertragen, wenn du durch $\frac{1}{2}d\zeta:\sigma$ ersetzt wird. Für die Parallelogrammseiten treten die Ufer der Querschnitte ein. Um aber nicht zu wiederholen, wollen wir einen Satz über die Periodicitätsmoduln eines Integrales zweiter Gattung herleiten, nach einer Methode, die ganz der für den Beweis des Abel'schen Satzes angedeuteten entspricht, nur dass hier die Linien l der Fläche T^* überflüssig werden, so dass man es nur mit der Fläche T' zu thun hat. — Das Integral zweiter Gattung

$$\frac{\partial u(\sigma,\zeta)}{\partial x}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{4}\zeta\, d\zeta}{(1-x\zeta)\sigma}$$

besitzt bei a und bei b bez. die Periodicitätsmoduln $2\partial K:\partial x$, $2i\partial K':\partial x$. Das über die Begrenzung von T' erstreckte Integral $\int\frac{\partial u(\sigma,\zeta)}{\partial x}\frac{d\zeta}{2\sigma}$ ist gleich

$$\int_{(a)}\frac{\partial(u^+-u^-)}{\partial x}\frac{d\zeta}{2\sigma}+\int_{(b)}\frac{\partial(u^+-u^-)}{\partial x}\frac{d\zeta}{2\sigma}=\int_{(a)}\frac{\partial K}{\partial x}\frac{d\zeta}{\sigma}+\int_{(b)}\frac{\partial iK'}{\partial x}\frac{d\zeta}{\sigma}=4iK'\frac{\partial K}{\partial x}-4iK\frac{\partial K'}{\partial x},$$

wenn u^+ den Werth von u auf dem positiven Ufer, u^- den auf dem negativen Ufer des Querschnittes bedeutet, über den zu integriren ist. Das Integral ist aber andrerseits (nach dem Cauchy'schen Satze) gleich dem Product von $2i\pi$ in das doppelte zweite Residuum des Integranden im Punkte $1:x$. Entwickelt man nun den Ausdruck

$$\frac{1}{2\sigma}\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{4}\zeta\, d\zeta}{(1-x\zeta)\sigma}$$

nach aufsteigenden (ganzen) Potenzen von $(\zeta-(1:x))$, so beginnt die Entwickelung mit der -1ten Potenz, und diese hat den Coefficienten $1:4xx'$, das doppelte Residuum ist also $1:2xx'$, und es folgt (nach Division mit $4i$) die wichtige, schon im § 105 benutzte Relation

$$K'\frac{\partial K}{\partial x}-K\frac{\partial K'}{\partial x}=\frac{\pi}{4xx'},\quad \frac{\partial\tau}{\partial x}=\frac{\pi^2}{4xx'K^2},$$

welche lehrt, dass der eine Periodicitätsmodul des Integrales zweiter Gattung sich durch den andern und die Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung darstellen lässt. Die Legendre'sche Form dieses Satzes wird sich später ergeben.

§ 108. **Das Additionstheorem für $u(\sigma,\zeta)$.** Der Abel'sche Satz lässt sich dazu benutzen, um das Additionstheorem der überall endlichen Integrale herzuleiten, und es soll hier mit Hilfe desselben die Congruenz $u(\sigma_1,\zeta_1)+u(\sigma_2,\zeta_2)\equiv u(\sigma,\zeta)$ gelöst werden. — Nach dem Abel'schen Satze ist

$$u(\sigma_1,\zeta_1)+u(\sigma_2,\zeta_2)\equiv u(\sigma_3,\zeta_3)+u(\sigma_4,\zeta_4),$$

wenn σ_1,ζ_1; σ_2,ζ_2 die Punkte Unendlich, σ_3,ζ_3; σ_4,ζ_4 die Punkte Null einer Function f zweiter Ordnung des Bereiches σ,ζ sind. Sind die ersten gegeben, so ist von den letzteren noch einer willkürlich, wir lassen ihn, σ_4,ζ_4, auf $0, 0$ fallen. Multiplicirt man f mit $(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)$, so hat dieser Ausdruck nach § 83, von einem constanten Factor abgesehen, die Form

$$\text{I)}\quad\begin{vmatrix}\zeta, & \zeta^2, & \sigma\\ \zeta_1, & \zeta_1^2, & -\sigma_1\\ \zeta_2, & \zeta_2^2, & -\sigma_2\end{vmatrix}=\sigma\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)-\sigma_1\zeta\zeta_2(\zeta-\zeta_2)-\sigma_2\zeta_1\zeta(\zeta_1-\zeta),$$

und es ist zu untersuchen, für welches Werthepaar σ_3,ζ_3 dieser Ausdruck verschwindet. Wir lassen den Index 3 fort. Setzt man I) gleich Null, so folgt

$$\text{I}^{\text{a}})\quad \sigma\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)=\sigma_1\zeta\zeta_2(\zeta-\zeta_2)-\sigma_2\zeta_1\zeta(\zeta-\zeta_1).$$

Erhebt man aufs Quadrat, setzt zur augenblicklichen Abkürzung

$$\lambda = (1-\zeta)(1-\varkappa\zeta),\ \lambda_1 = (1-\zeta_1)(1-\varkappa\zeta_1),\ \lambda_2 = (1-\zeta_2)(1-\varkappa\zeta_2)$$

und dividirt mit $\zeta\zeta_1\zeta_2$, so folgen die Beziehungen

$$\lambda\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)^2 = \lambda_1\zeta\zeta_2(\zeta-\zeta_2)^2 + \lambda_2\zeta\zeta_1(\zeta-\zeta_1)^2 - 2\sigma_1\sigma_2\zeta(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2),$$

$$\zeta_1\zeta_2(\lambda(\zeta_2-\zeta_1)^2 - \lambda_1(\zeta-\zeta_2)^2 - \lambda_2(\zeta-\zeta_1)^2) - \lambda_1\zeta_2(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)^2 - \lambda_2\zeta_1(\zeta-\zeta_2)(\zeta-\zeta_1)^2$$
$$+ 2\sigma_1\sigma_2\zeta(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2) = 0.$$

Der Factor von $\zeta_1\zeta_2$ verschwindet für $\zeta = \zeta_1$ und $\zeta = \zeta_2$, es lässt sich demnach diese Gleichung mit $(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)$ dividiren, wodurch sich ergiebt

$$\zeta_1\zeta_2((1+\varkappa)(\zeta_1+\zeta_2) - 2 - 2\varkappa\zeta_1\zeta_2) - \lambda_1\zeta_2(\zeta-\zeta_2) - \lambda_2\zeta_1(\zeta-\zeta_1) + 2\sigma_1\sigma_2\zeta = 0,$$

$$\zeta(\lambda_1\zeta_2 + \lambda_2\zeta_1 - 2\sigma_1\sigma_2)$$
$$= \zeta(\sigma_1\zeta_2 - \sigma_2\zeta_1)^2 : \zeta_1\zeta_2 = \zeta_1\zeta_2((1+\varkappa)(\zeta_1+\zeta_2) - 2 - 2\varkappa\zeta_1\zeta_2) + \lambda_1\zeta_2^2 + \lambda_2\zeta_1^2 = (\zeta_2-\zeta_1)^2,$$

$$\text{II)}\quad \zeta = \frac{\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)^2}{(\sigma_2\zeta_1-\sigma_1\zeta_2)^2} = \frac{\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)^2(\sigma_1\zeta_2+\sigma_2\zeta_1)^2}{(\sigma_2^2\zeta_1^2-\sigma_1^2\zeta_2^2)^2} = \frac{(\zeta_1\sigma_2+\zeta_2\sigma_1)^2}{\zeta_1\zeta_2(1-\varkappa\zeta_1\zeta_2)^2}.$$

Der Ausdruck I[a]) bestimmt σ eindeutig. — Wird also für σ, ζ das eben gefundene Werthepaar gesetzt, so ist

$$u(\sigma_1,\zeta_1) + u(\sigma_2,\zeta_2) \equiv u(\sigma,\zeta) + u(0,0) \equiv u(\sigma,\zeta),$$

und das Additionstheorem ist gefunden. Setzt man sa^2u für ζ, so ergiebt sich daraus das Additionstheorem dieser Function, und durch Wurzelausziehen wiederum das für sau.

§ 109. **Mehr als zweiwerthige algebraische Gebilde von beliebigem Geschlechte.** Es sei ein Bereich r, t gegeben, in welchem der Grundgrösse t die algebraische Grösse r adjungirt ist, die mit t durch eine irreductibele, d. h. nicht in Factoren, die in r, t rational sind, zerlegbare Gleichung

$$F(\overset{n}{r},\overset{m}{t}) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0$$

verbunden ist, in der die $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Functionen von t vom Grade m sind. Ist $r = \alpha$, $t = \beta$ ein zusammengehörendes Werthepaar, ein Werthepaar, welches die Gleichung $F(r,t) = 0$ befriedigt, so ist

$$F(r,t) = (r-\alpha)F_1 + (t-\beta)F_2 + \tfrac{1}{2}(r-\alpha)^2F_{11} + (r-\alpha)(t-\beta)F_{12} + \tfrac{1}{2}(t-\beta)^2F_{22} + \ldots,$$

wo

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial r},\ F_2 = \frac{\partial F}{\partial t},\ F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2},\ F_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial t},\ F_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},\ \ldots$$

ist, und wo in die Differentialquotienten α, β für r, t zu setzen ist. Ist nun F_1 nicht Null, so lässt sich nach § 29 $r-\alpha$ nach aufsteigenden Potenzen von $t-\beta$ in einer gewissen Umgebung des Punktes β entwickeln, und mithin ist dort r eine reguläre Function von t. Wird aber $F_1(\alpha,\beta) = 0$, so lässt sich $r-\alpha$ nach ganzen Potenzen von $\sqrt{t-\beta}$ entwickeln. Die Function r ist in der Umgebung eines solchen Punktes zweiändrig. Wir nennen eine solche Stelle eine Verzweigungsstelle des Bereiches r, t. Die Gleichung $F(r,t) = 0$ hat dort eine doppelte Wurzel, weil auch $F_1(r,t)$ verschwindet. Führt man die Variabele t um einen solchen Punkt herum, so werden von den n Werthen von r zwei mit einander vertauscht. Alle Functionen $f(r,t)$ des Bereiches r,t haben dieselbe Eigenschaft, dass an einer solchen Stelle von ihren n verschiedenen Werthen zwei zusammenfallen, und, wenn nicht ihre Werthe für jedes t in Gruppen untereinander gleicher zerfallen, wie z. B., wenn f von t allein abhängt, so vertauschen sich auch zwei ihrer Werthe, wenn t um eine solche Stelle völlig herumgeführt wird.

Ist jedoch nicht bloss $F_1(\alpha,\beta) = 0$, sondern auch $F_2(\alpha,\beta) = 0$, so ist

$$F(r,t) = (r-\alpha)^2F_{11} + 2(r-\alpha)(t-\beta)F_{12} + (t-\beta)^2F_{22} + \tfrac{1}{3}(r-\alpha)^3F_{111} + \ldots = 0,$$

es lässt sich $r-\alpha$ wieder nach **ganzen** Potenzen von $t-\beta$ entwickeln, auf zweierlei Weise:

$$r-\alpha = (t-\beta)\frac{-F_{11}+\sqrt{F_{11}F_{22}-F_{12}F_{12}}}{F_{11}} + c_2(t-\beta)^2 + c_3(t-\beta)^3 + \ldots,$$

$$r-\alpha = (t-\beta)\frac{-F_{11}-\sqrt{F_{11}F_{22}-F_{12}F_{12}}}{F_{11}} + c'_2(t-\beta)^2 + c'_3(t-\alpha)^3 + \ldots,$$

und es findet eine Verzweigung an jener Stelle nicht statt, obschon dort von den n Werthen von r zwei zusammenfallen. Riemann nennt einen solchen Punkt einen **sich aufhebenden Verzweigungspunkt**; es ist vielleicht einfacher, ihn einen **Doppelpunkt** zu nennen. — Complicationen, die eintreten können, wenn $F_{11}F_{22} - F_{12}F_{12} = 0$ ist, oder wenn zugleich F_1, F_{11}, oder F_1, F_{11}, F_{111} u. s. w. Null

ist, mögen der Einfachheit halber von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben, es möge angenommen werden, dass ausser den sich aufhebenden Verzweigungsstellen nur einfache Verzweigungsstellen vorkommen. — Während die einfachen Verzweigungspunkte für alle Functionen des Bereiches r, t, wenn deren Werthe nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen, Verzweigungsstellen sind, so sind die sich aufhebenden Verzweigungspunkte oder Doppelpunkte keineswegs wieder für alle Functionen Doppelpunkte. Denn verschwinden $f(r,t)$ und $h(r,t)$ in einem solchen Punkte, so besitzt der Quotient dieser Functionen dort im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe, je nachdem die eine oder die andere der obigen Potenzentwickelungen von r eingesetzt wird. Einem Doppelpunkt entsprechen zwei verschiedene Stellen des Bereiches r, t, an dem nur einige Functionen des Bereiches denselben Werth haben, während eine Verzweigungsstelle nur eine Stelle ist.

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die verschiedenen Werthe von r für ein gegebenes t, so verschwindet die in t ganze, weil einwerthige und für endliche t endliche Function vom $2m(n-1)^{\text{ten}}$ Grade

$$a_0^{n-2} F_1(r_1,t) F_1(r_2,t) F_1(r_3,t) \ldots F_1(r_n,t),$$

in der ersten Ordnung in jedem Verzweigungspunkte α, β, weil dort zwei Factoren wie $r-\alpha$ oder $\sqrt{t-\beta}$ verschwinden. In jedem Doppelpunkte aber wird die Discriminante unendlich klein zweiter Ordnung, weil zwei Factoren wie $t-\beta$ verschwinden. Dem Bereiche r, t gehören demnach

$$w = 2m(n-1) - 2d$$

Verzweigungsstellen an, wenn d Doppelpunkte vorhanden sind.

Der Bereich r, t ist im Grunde seiner Natur nach mit dem Bereiche t, r identisch. Bei Bestimmung der Verzweigungsstellen aber ist die Ordnung der Variabeln nicht gleichgiltig, denn sie hängen von dem partiellen Differentialquotienten, genommen nach der ersten Variabeln, ab. Die Doppelpunkte hingegen sind von der Ordnung der Variabeln unabhängig. Wird die Zahl der Verzweigungsstellen im Bereiche r, t mit w_t, die im Bereiche t, r mit w_r bezeichnet, so ist

$$w_t = 2m(n-1) - 2d, \quad w_r = 2n(m-1) - 2d.$$

Vermindert man aber die Zahl der Windungspunkte um das Doppelte der Gradzahl der Gleichung $F=0$ in Bezug auf die erste Variabele, so ergiebt sich $w_t - 2n = w_r - 2m$. Diese immer gerade Zahl wird nach Riemann gleich $2(p-1)$ gesetzt, und p wird das Geschlecht des Bereiches genannt. Setzt man für w_t oder w_r ihre Ausdrücke in m, n, d ein, so findet man

$$p = (n-1)(m-1) - d.$$

Diese Zahl ist für alle congruenten Bereiche dieselbe, sie ist für sie eine Invariante. — Ist $r' = f(r,t)$ eine Function des Bereiches r, t, deren Werthe für dasselbe t nicht in Gruppen untereinander gleicher zerfallen*), und sind $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots, r'_n$ die verschiedenen Werthe von r' für dasselbe t, so sind in dem Ausdrucke $(r-r'_1)(r-r'_2)\ldots(r-r'_n) = 0$ die Coefficienten der Potenzen von r' als symmetrische Functionen der verschiedenen Werthe einwerthige, also rationale Functionen von t. Der Ausdruck lässt sich mit einer solchen ganzen Function von t multipliciren, dass er in eine algebraische Gleichung $\Phi(r',t)$ mit ganzen Coefficienten in t übergeht, vom Grade n in r', vom Grade m' in t, wenn r' im Bereiche r, t m'-mal unendlich gross wird. Diese Gleichung lehrt nebenbei, dass r' im Bereiche r, t jeden Werth gleich oft annimmt. Die Discriminante dieser Gleichung ist in t vom $2m'(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, und da r' im Bereiche r, t $2m(n-1) - 2d_{r,t}$ Verzweigungsstellen hat, wenn $d_{r,t}$ die Doppelpunkte des Bereiches r, t sind, so hat der Bereich r', t

$$d_{r',t} = \tfrac{1}{2}(2m'(n-1) - 2m(n-1) + 2d_{r,t}) = (m'-m)(n-1) + d_{r,t}$$

Doppelpunkte, und für das Geschlecht des Bereiches r', t ergiebt sich demnach die Zahl

$$(m'-1)(n-1) - d_{r',t} = (m'-1)(n-1) - (m'-m)(n-1) - d_{r,t} = (m-1)(n-1) - d_{r,t} = p,$$

d. h. das Geschlecht von r', t ist gleich dem von r, t.

Dasselbe gilt natürlich, wenn man für t eine neue Variabele $t' = f(t,r')$ einführt, womit der

*) Zerfallen die Werthe von r' in Gruppen untereinander gleicher, so brauchen nicht alle Verzweigungsstellen des Bereiches r, t zugleich auch Verzweigungsstellen des Bereiches r', t zu sein. Es ist dann r' zwar wie r verzweigt aber nicht r wie r'; die Bereiche sind einander nicht congruent.

Satz erwiesen ist, dass das Geschlecht der congruenten Bereiche r, t und r', t' dasselbe ist, dass das Geschlecht eine Invariante ist. — Dass r auch eine rationale Function von r', t ist, dass eben die Bereiche r, t; r', t congruent sind, ergiebt sich durch Elimination der höheren Potenzen von r aus den Gleichungen $r' = f(r, t)$, $F(r, t) = 0$.

Denkt man sich r, t als Cartesianische Coordinaten eines Punktes, so sagt man, die Curve $F(r, t) = 0$ sei vom Geschlecht p. Eine Curve n^{ter} Ordnung, wenn sie nach der in der Geometrie üblichen Auffassung im Unendlichen keine Singularitäten hat, ist in Bezug auf beide Coordinaten von gleichem Grade, und sie werden gleichzeitig unendlich. Dies würde bei der hier nach Riemann angenommenen Auffassung ein Vorkommen von sich aufhebenden Verzweigungspunkten im Unendlichen bedeuten, und zwar würden $\frac{1}{2}n(n-1)$ solcher Punkte zu zählen sein, da für ein unendliches t jeder der n Werthe von r mit jedem andern gleich (unendlich gross) ist. Wir werden also, wenn d die Zahl der übrigen Doppelpunkte ist, für das Geschlecht die Beziehung erhalten

$$p = (n-1)(n-1) - d - \tfrac{1}{2}n(n-1) = (n-1)(\tfrac{1}{2}n - 1) - d = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d,$$

was mit bekannten Formeln der Geometrie übereinstimmt. — Es ist aus dem Angeführten ersichtlich, dass das Geschlecht einer Curve nicht blos den collinearen, sondern auch den sogenannten Cremonaschen Verwandtschaften gegenüber eine **Invariante** ist.

§ 110. **Bereiche r, t vom Geschlecht Eins, deren Adjuncte r mehr als zweiwerthig ist.** Es sei r mit t durch die Gleichung $F(r, t) = 0$ verbunden, wenn F in r vom Grade n, in t vom Grade m ist, während $d = (m-1)(n-1) - 1 = mn - m - n$, das Geschlecht also Eins ist. Die ganze Function $\psi(r, t)$ vom Grade $n-1$ in r und $m-1$ in t enthält $m \cdot n$ Constanten, deren Verhältnisse zur Bestimmung von $mn-1$ Punkten Null dienen können. Es wird r m-mal, t n-mal unendlich gross, und also wird ψ $m(n-1) + n(m-1) = 2mn - m - n$ mal unendlich gross und also ebensoviel mal Null. Bestimmt man nun d der Constantenverhältnisse in ψ so, dass ψ in jedem Doppelpunkte verschwindet, so verschwindet ψ ausserdem noch in $2nm - m - n - 2d = 2nm - n - m - 2nm + 2m + 2n = m + n$ Punkten und enthält noch $nm - 1 - d = n + m - 1$ willkürliche Constantenverhältnisse. Werden daher von den noch übrigen Nullpunkten $n + m - 1$ auf gegebene gelegt, so ist der letzte dadurch mit bestimmt. Werden aber nur $n + m - 2$ bestimmt, so bleiben noch zwei übrig, von denen einer willkürlich ist. Sind nun $\psi_1(r, t)$ und $\psi_2(r, t)$ zwei solcher Functionen, die in den Doppelpunkten und $n + m - 2$ gegebenen Punkten gleichzeitig verschwinden, deren weitere Nullpunkte aber verschieden sind, so ist $z = \psi_1(r, t) : \psi_2(r, t)$ eine Function des Bereiches r, t, die nur **zweimal** unendlich gross wird, jeden Werth zweimal annimmt. Zwischen z und t besteht demnach eine Gleichung $G(t, z) = 0$ vom n^{ten} Grade in z und **zweiten** Grade in t, und der r, t congruente Bereich z, t ist vom Geschlecht Eins. Der Bereich t, z hat also wie z, t im Ganzen $d = (2-1)(n-1) - p = n - 2$ Doppelpunkte. Die Discriminante ist vom Grade $2n$ in z und verschwindet in den d Doppelpunkten zweifach, in vier Punkten einfach. Die Lösung der Gleichung lässt sich in die Form bringen

$$t = R_1(z) + R_2(z)\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-e)} = R_1(z) + R_2(z)s,$$

worin R_1, R_2 rationale Functionen von z, und a, b, c, e die einfachen Verzweigungsstellen sind. Es ist also t eine rationale Function von s und z, und die Bereiche r, t und s, z sind einander congruent. Daraus folgt der Satz: Jeder Bereich r, t vom Geschlecht Eins ist einem Bereiche s, z congruent, in dem s eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck vierten Grades in z ist, und es lassen sich, wie s, z, so auch die Functionen des Bereiches r, t eindeutig durch eine doppelt periodische oder elliptische Function und deren Ableitung darstellen.

Die Coordinaten einer Curve vom Geschlecht Eins sind als rationale Function einer doppelt periodischen Function und ihrer Ableitung darstellbar.

§ 111. **Ein specieller Fall.** Ist die Function r mit t durch die Gleichung verknüpft

$$F(r, t) = r^3 - (t-a)(t-b)(t-c) = 0,$$

so haben wir, wenn t als Grundvariabele angenommen wird, einen Fall, wie wir ihn von der Betrachtung

vorhin ausschlossen, dass für $r=0$, $t=a$, $F_1=0$, $F_{11}=0$ ist, und ebenso für $r=0$, $t=b$; $r=0$, $t=c$. Man erkennt aber das Geschlecht des Bereiches r, t sogleich, wenn man r als Grundvariabele, t als adjungirte annimmt. Schreiben wir $G(t,r)$ für $F(r,t)$, so ist $G_1=0$, wenn $3t^2-2(a+b+c)t+ab+bc+ac=0$ ist. Dies giebt zwei Werthe von t, zu jedem gehören drei von r, es giebt also sechs Verzweigungsstellen. Da t in G vom dritten Grade ist, so haben wir aus der Beziehung $w-2n=6-6=2(p-1)=0$, für das Geschlecht den Werth $p=1$. Setzt man $r=z^2(t-c)$, so wird die Gleichung für z

$$(t-c)^2z^3-(t-a)(t-b)=t^2(z^3-1)-2t(cz^3-\tfrac{1}{2}(a+b))+c^2z^3-ab=0.$$

Löst man diese Gleichung auf, so folgt

$$t=\left[cz^3-\tfrac{1}{2}(a+b)+\sqrt{z^3(c-a)(c-b)+\tfrac{1}{4}(a-b)^2}\right]:(z^3-1).$$

Wird nun s für $\sqrt{z^3(c-a)(c-c)+\frac{1}{4}(a-b)^2}$ gesetzt, so ist der Bereich s, z, dem man noch leicht die Legendre'sche oder die zweite Normalform giebt, congruent dem Bereiche r, t, und die Functionen des letzteren lassen sich durch elliptische Functionen darstellen. Eine directe Darstellung der Functionen r, t durch Thetaquotienten habe ich in Schlömilch's Zeitschrift (Bd. XXVII, pag. 181) gegeben.

Darstellung der Integrale zweiter und dritter Gattung durch Thetafunctionen.

§ 112. Die logarithmischen Differentialquotienten der Thetafunctionen. Der Differentialquotient $d\,lg\,\Theta_{hg}(u):du$, den wir mit $Z_{hg}(u)$ bezeichnen wollen, hat die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn u um $2K$ vermehrt wird, und um $-i\pi:K$ zu wachsen, wenn u um $2iK'$ vermehrt wird, wie aus der Periodicität der Thetafunctionen unmittelbar erkannt wird.*) Ist u nach den Moduln $2K$, $2iK'$ congruent $(g+1)K+(h+1)iK'$, so wird $Z_{hg}(u)$ unendlich gross erster Ordnung. Betrachtet man u als Function von s, z (in der Legendre'schen Normalform) oder von σ, ζ (Normalform II), so ist $Z_{hg}(u)$ in der zugehörigen Fläche T' einwerthig, besitzt bei a den Periodicitätsmodul Null, bei b den Periodicitätsmodul $-i\pi:K$, und wird in einem Verzweigungspunkte (in T) unendlich gross erster Ordnung, ist also ein Integral zweiter Gattung, worauf wir jedoch erst später kommen wollen. Der logarithmische Differentialquotient einer geraden oder ungeraden Function ist stets ungerade, und mithin ist $Z_{hg}(-u)=-Z_{hg}(u)$. Dass für jedes ganzzahlige m

$$\text{I)}\quad Z_{00}(mK)=Z_{01}(mK)=Z_{10}(2mK)=Z_{11}((2m+1)K)=0$$

ist, erweist sich leicht. Es genügt, dies für $Z_{00}(mK)$ nachzuweisen. $\Theta'_{00}(0)=\Theta'_{00}$ ist Null, weil $\Theta_{00}(u)$ gerade ist. Ebenso ist $\Theta'_{01}(0)=0$, folglich auch $\Theta'_{00}(K)$. Also ist $Z_{00}(0)=0$, $Z_{00}(K)=0$, und wegen der Periodicität $Z(2mK)=0$, $Z(K+2mK)=0$, $Z(mK)=0$. Die Richtigkeit der übrigen Gleichungen ergiebt sich dann aus IV). Ferner ist

$$\text{II)}\quad Z_{11}(0)=Z_{10}(K)=Z_{00}(K+iK')=Z_{01}(iK')=\infty,$$

weil die entsprechenden Thetafunctionen für diese Argumente verschwinden. Setzt man in der Gleichung $Z_{hg}(u+2iK')=Z_{hg}(u)-i\pi:K$, wenn $(hg)\gtreqless(01)$ ist, $-iK'$ für u, so findet man $2Z_{hg}(iK')=-i\pi:K$, und daraus

$$\text{III)}\quad Z_{00}(iK')=Z_{01}(K+iK')=Z_{10}(iK')=Z_{10}(K+iK')=Z_{11}(iK')=Z_{11}(K+iK')=-i\pi:2K.$$

Differenzirt man aber die elliptischen Functionen $sa\,u$, $ca\,u$, $da\,u$ logarithmisch, so ergiebt sich

$$\text{IV)}\quad Z_{11}(u)-Z_{01}(u)=\frac{ca\,u\,da\,u}{sa\,u},\quad Z_{10}(u)-Z_{01}(u)=-\frac{sa\,u\,da\,u}{ca\,u},\quad Z_{00}(u)-Z_{01}(u)=-\frac{k^2sa\,u\,ca\,u}{da\,u}.$$

*) Die Jacobi'sche Function $Z(u)$ wird hier mit $Z_{01}(u)$ bezeichnet.

Zur Berechnung der Z-Functionen aus u dienen aus den Thetadarstellungen in Producten und Reihen unmittelbar fliessende Formeln, von denen wir nur eine hinschreiben:

$$\text{V)}\quad Z_{00}(u) = \frac{-2\pi}{K}\mathfrak{S}\frac{q^{2m-1}\sin(\pi u:K)}{1+2q^{2m-1}\cos(\pi u:K)+q^{2(2m-1)}} = \frac{-2\pi}{K}\,\frac{\mathfrak{S}\, m\, q^{mm}\sin(m\pi u:K)}{1+2\mathfrak{S}\, q^{mm}\cos(m\pi u:K)}.$$

Eine Darstellung durch die trigonometrische Reihe findet man wie folgt. Die Formel II) des Paragraphen 46 giebt

$$lg\,\Theta_{01}(u) = lg\,\Theta_{01} - 2\,lg\,\mathfrak{P}(1-q^{2n+1}) + \mathfrak{S}\,lg\,[1-2q^{2m-1}\cos(\pi u:K)+q^{2(2m-1)}]$$

$$= lg\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)}) + \mathfrak{S}\,[lg(1-q^{2m-1}e^{\frac{i\pi u}{K}}) + lg(1-q^{2m-1}e^{\frac{-\pi i u}{K}})],$$

und wenn man die Logarithmen in Reihen entwickelt, was für alle reellen Werthe von $u:K$ möglich ist,

$$lg\,\Theta_{01}(u) = lg\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)}) - 2\,\mathfrak{S}_{m'}\mathfrak{S}_m\frac{1}{m}\cdot q^{(2m'-1)m}\cdot\cos\frac{m\pi u}{K}.$$

Da für reelle Werthe von $u:K$ diese Reihen unbedingt convergent sind, so können wir die Reihenfolge der beiden Summationen umkehren und die Summation über m' ausführen, dann erhalten wir

$$lg\,\Theta_{01}(u) = lg\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)}) - 2\,\mathfrak{S}\frac{q^m\cdot\cos(m\pi u:K)}{m(1-q^{2m})},$$

und wenn wir u um K vermehren, erhalten wir

$$lg\,\Theta(u) = lg\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)}) - 2\,\mathfrak{S}\frac{(-1)^m\cdot q^m\cdot\cos(m\pi u:K)}{m(1-q^{2m})},$$

und wenn wir endlich diese Formeln differenziren,

$$\text{VI)}\quad Z_{01}(u) = \frac{d\,lg\,\Theta_{01}(u)}{du} = \frac{2\pi}{K}\mathfrak{S}\frac{q^m\sin(m\pi u:K)}{1-q^{2m}},\quad Z_{00}(u) = \frac{d\,lg\,\Theta(u)}{du} = \mathfrak{S}\frac{(-1)^m q^m\sin(m\pi u:K)}{1-q^{2m}}.$$

§ 113. **Addition der Z-Functionen.** Aus den Gleichungen I) des § 46 folgen unmittelbar diese:

$$\text{I)}\quad Z_{00}(u+K)=Z_{01}(u),\ Z_{01}(u+K)=Z_{00}(u),\ Z_{11}(u+K)=Z_{10}(u),\ Z_{10}(u+iK')=Z_{00}(u)-i\pi:2K.$$

Das (sogenannte) Additionstheorem aber der Z-Functionen leitet man auf folgende Weise ab. Es ist $Z_{00}(u+v)-Z_{00}(u)-Z_{00}(v)$ in Bezug auf u sowohl, als auch in Bezug auf v eine doppelt periodische Function mit den Perioden $2K$, $2iK'$, die in den beiden Punkten $u=K+iK'$, $u=-v+K+iK'$ als Function von u unendlich gross wird, für $u=0$ und $u=-v$ aber verschwindet. Sie kann sich demnach von der doppelt periodischen Function mit denselben Perioden $\Theta_{11}(u)\Theta_{11}(u+v):\Theta(u)\Theta(u+v)$ oder der dieser proportionalen Function $sa\,u\,sa(u+v):da\,u\,da(u+v)$ nur durch einen constanten, d. h. von u unabhängigen Factor unterscheiden. Setzt man K für u, so folgt aus IV) des vorigen Paragraphen

$$Z_{01}(v)-Z_{00}(v) = k^2 sa\,v\,ca\,v:da\,v = \text{Const.}\,sa(v+K):k'da(v+K) = \text{Const.}\,ca\,v:k'^2$$

(nach XI) § 55) und also Const. $= k^2k'^2 sa\,v:da\,v$. Somit hat man

$$\text{II)}\quad Z_{00}(u+v) = Z_{00}(u)+Z_{00}(v)+k^2k'^2\frac{sa\,u\,sa\,v\,sa(u+v)}{da\,u\,da\,v\,da(u+v)},\quad Z_{00}(u) = 2Z_{00}(\tfrac{1}{2}u)+k^2k'^2\frac{sa^2\frac{1}{2}u\,sa\,u}{da^2\frac{1}{2}u\,da\,u}.$$

Dieselbe Methode liefert die Gleichungen

$$\text{III)}\quad Z_{01}(u+v) = Z_{01}(u)+Z_{01}(v)-k^2 sa\,u\,sa\,v\,sa(u+v),\quad Z_{01}(u) = 2Z_{01}(\tfrac{1}{2}u)-k^2 sa^2\tfrac{1}{2}u\,sa\,u,$$

$$\text{IV)}\quad Z_{10}(u+v) = Z_{10}(u)+Z_{10}(v)-\frac{k'^2 sa\,u\,sa\,v\,sa(u+v)}{ca\,u\,ca\,v\,ca(u+v)},\quad Z_{10}(u) = 2Z_{10}(\tfrac{1}{2}u)-k'^2\frac{sa^2\frac{1}{2}u\,sa\,u}{ca^2\frac{1}{2}u\,ca\,u},$$

$$\text{V)}\quad Z_{11}(u+v) = Z_{11}(u)+Z_{11}(v)+(sa^3v\,sa'u-sa^3u\,sa'v):sa\,u\,sa\,v\,(sa^2u-sa^2v),$$

und durch Specialisirung

$$Z_{00}(\tfrac{1}{2}K) = -\tfrac{1}{2}\frac{k^2}{1+k'},\quad Z_{01}(\tfrac{1}{2}K) = \tfrac{1}{2}(1-k'),\quad Z_{01}(\tfrac{1}{2}iK') = \frac{-i\pi}{4K}+\tfrac{1}{2}(k+ik')-\tfrac{1}{2}(1-k')+\frac{ik\sqrt{k+ik'}}{\sqrt{1+k'}}.$$

§ 114. **Eine Transformation der Z-Functionen.** Aus der Transformationsformel I) des § 67, wozu auch § 70 zu vergleichen ist, lassen sich einige Transformationsformeln für die Z-Functionen herleiten. Wir begnügen uns jedoch mit der einen, welche $\tau=-\pi K':K$ in $\tau'=-\pi K:K'$, k in k' transformirt, und die für reelle q ein rein imaginäres Argument in ein reelles verwandelt. Es mögen

$Z_{hg}(u)$ und $\Theta_{hg}(u)$ Functionen mit dem Modul τ oder dem Modul der elliptischen Functionen $k=\sqrt{\varkappa}$ sein, während $\bar{Z}_{hg}(u)$, $\bar{\Theta}_{hg}(u)$ Functionen mit dem Modul τ' oder dem der elliptischen Functionen $k'=\sqrt{\varkappa'}$ sind. Alsdann ist nach II) § 67

$$\Theta_{hg}(u) = \text{Const.}\, e^{u^2\pi : 4KK'}\, \bar{\Theta}_{gh}(ui).$$

Differenzirt man diese Gleichung logarithmisch, so folgt

$$Z_{hg}(u) = u\pi : 2KK' + i\bar{Z}_{gh}(ui),$$

und wenn man $-ui$ für u schreibt, und mit $-i$ multiplicirt,

$$\text{I)}\ iZ_{00}(iu) = \frac{u\pi}{2KK'} + \bar{Z}_{00}(u),\quad \text{II)}\ iZ_{11}(iu) = \frac{u\pi}{2KK'} + \bar{Z}_{11}(u,k'),$$

$$\text{III)}\ iZ_{01}(iu) = (u\pi : 2KK') + \bar{Z}_{10}(u) = -tga(u,k')\, da(u,k') + (u\pi : 2KK') + \bar{Z}_{01}(u).$$

Differenzirt man die Gleichung I) nach u und setzt nachher $u=0$, so fliesst daraus

$$\text{IV)}\ -\Theta'' : \Theta = (\pi : 2KK') + \bar{\Theta}'' : \bar{\Theta}.$$

§ 115. **Die Differentialquotienten der Zetafunctionen sind doppelt periodische Functionen.** Zu den Differentialquotienten der Z-Functionen kann man dadurch gelangen, dass man du für v in den Additionstheoremen des vorigen Paragraphen setzt, oder nach Potenzen von v entwickelt und vergleicht, was beiderseits mit v multiplicirt ist. So findet man

$$\text{I)}\ Z'_{00}(u) = \frac{\partial^2 lg\,\Theta(u)}{\partial u^2} = \frac{k^2k'^2 sa^2u}{da^2u} + \frac{\Theta''}{\Theta} = k^2 + \frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{k^2ca^2u}{da^2u} = \frac{\Theta''}{\Theta} - k'^2 + \frac{k'^2}{da^2u},$$

$$\text{II)}\ Z'_{01}(u) = \frac{\partial^2 lg\,\Theta_{01}(u)}{\partial u^2} = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - k^2sa^2u = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - 1 + da^2u = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - k^2 + k^2ca^2u,$$

$$\text{III)}\ Z'_{10}(u) = \frac{\Theta''_{10}}{\Theta_{10}} - \frac{k'^2 sa^2u}{ca^2u} = \frac{\Theta''_{10}}{\Theta_{10}} + k'^2 - \frac{k'^2}{ca^2u} = \frac{\Theta''_{10}}{\Theta_{10}} + 1 - \frac{da^2u}{ca^2u},$$

$$\text{IV)}\ Z'_{11}(u) = \frac{\partial\, lg\,\Theta_{11}(u)}{\partial u} = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - \frac{1}{sa^2u}.$$

§ 116. **Einige Beziehungen zwischen Constanten.** Setzt man

$$\text{I)}\ \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\varkappa\zeta} : \sqrt{\zeta(1-\zeta)}\right) d\zeta = \int_0^K da^2u\, du = E,\quad \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\varkappa'\zeta} : \sqrt{\zeta(1-\zeta)}\right) d\zeta = E',$$

und integrirt die Gleichung

$$\frac{d(\zeta(1-\zeta):\sigma)}{d\zeta} = \frac{1-2\zeta+\varkappa\zeta^2}{2(1-\varkappa\zeta)\sigma} = \frac{-\varkappa'}{2\varkappa\sigma} + \frac{1-\varkappa\zeta}{2\varkappa\sigma} - \frac{\varkappa'\zeta}{2(1-\varkappa\zeta)\sigma},$$

so folgt

$$\frac{\zeta(1-\zeta)}{\sigma} = -\frac{\varkappa'}{\varkappa}\int_0^\zeta \frac{\frac{1}{2}d\zeta}{\sigma} + \frac{1}{\varkappa}\int_0^\zeta \frac{\frac{1}{2}(1-\varkappa\zeta)\,d\zeta}{\sigma} - 2\varkappa'\int_0^\zeta \frac{\frac{1}{4}\zeta\, d\zeta}{(1-\varkappa\zeta)\sigma},$$

setzt man $\zeta=1$, und vertauscht man $\varkappa$ mit $\varkappa'$, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\text{II)}\ 0 = -\frac{\varkappa' K}{\varkappa} + \frac{1}{\varkappa}E - 2\varkappa'\frac{\partial K}{\partial\varkappa},\quad 0 = -\frac{\varkappa K'}{\varkappa'} + \frac{1}{\varkappa'}E' + 2\varkappa\frac{\partial K'}{\partial\varkappa}.$$

Integrirt man die Gleichung II) des vorigen Paragraphen zwischen 0 und K, so folgt

$$Z_{01}(K) = 0 = (\Theta''_{01} : \Theta_{01})K - K + E,\quad E : K = 1 - (\Theta''_{01} : \Theta_{01}).$$

Um aber Beziehungen zwischen $\Theta'' : \Theta$, $\Theta''_{01} : \Theta_{01}$, $\Theta''_{10} : \Theta_{10}$ zu erhalten, differenzire man die Gleichungen IV) des § 112 nach u und setze $u=0$, so folgen die Gleichungen

$$\text{III)}\ \frac{E}{K} = 1 - \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} = k'^2 - \frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{\Theta''_{10}}{\Theta_{10}} = \frac{\pi^2}{4K^2}\,\frac{\mathfrak{S}\, q^{m(m-1)}(2m-1)^2}{\mathfrak{S}\, q^{m(m-1)}} = \frac{\pi^2}{4K^2}\left(1 + 8\,\mathfrak{S}\,\frac{(-1)^{m+1} m q^{2m}}{1-q^{2m}}\right),$$

$$\text{IV)}\ \frac{E-K}{K} = -\frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} = \frac{2\pi^2}{K^2}\,\frac{-q+4q^4-9q^9+\dots}{1-2q+2q^4-2q^9+\dots} = -\frac{2\pi^2}{K^2}\,\mathfrak{S}\,\frac{mq^m}{1-q^{2m}}.$$

Die Gleichung IV) des § 114 giebt, wenn die Θ durch E, K, die $\bar{\Theta}$ durch E', K' ausgedrückt werden, nach Multiplication mit KK' die Legendre'sche Relation (vergl. § 107)

$$\text{V)}\ KE' + K'E - KK' = \tfrac{1}{2}\pi.$$

§ 117. Vergleichung der Z-Functionen mit den Integralen zweiter Gattung des Normalbereiches II. Multipliciren wir die Gleichungen I) bis IV) des § 115 mit $du = \frac{1}{2} d\zeta : \sigma$, u durch $u(\sigma, \zeta)$ ersetzend, so finden wir, die Gleichungen III) und IV) des vorigen Paragraphen benutzend, der Reihe nach die Formeln

$$\text{I)}\ Z_{00}(u) = \frac{K-E}{K} - \int_0^u \frac{k^2 ca^2 u\, du}{da^2 u} = \frac{-E}{K} u + \int_0^u \frac{k'^2 du}{da^2 u} = \frac{K-E}{K} u - \int_0^{(\sigma,\zeta)} \frac{\frac{1}{2}(1-\zeta)\varkappa\, d\zeta}{(1-\varkappa\zeta)\sigma}$$

$$= \frac{-E}{K} u(\sigma,\zeta) + \int_0^{(\sigma,\zeta)} \frac{\frac{1}{2}\varkappa' d\zeta}{(1-\varkappa\zeta)\sigma},\ \text{für } u = K,\ E = \int^1 \frac{\frac{1}{2}\varkappa' d\zeta}{(1-\varkappa\zeta)\sigma},$$

$$\text{II)}\ Z_{01}(u) = -\frac{Eu}{K} + \int_0^u da^2 u\, du = \frac{(K-E)u}{K} - k^2 \int_0^u sa^2 u\, du = \frac{(K-E)u(\sigma,\zeta)}{K} - \int_0^{(\sigma,\zeta)} \frac{\frac{1}{2}\varkappa\zeta\, d\zeta}{\sigma}$$

$$= -\frac{Eu(\sigma,\zeta)}{K} + \int_0^{(\sigma,\zeta)} \frac{\frac{1}{2}(1-\varkappa\zeta)\, d\zeta}{\sigma},\ \text{für } u = K,\ E = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\varkappa\zeta}{\zeta(1-\zeta)}}\, d\zeta,$$

$$\text{III)}\ Z_{10}(u) = \frac{u\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - \int_0^u \frac{da^2 u\, du}{ca^2 u} = u\frac{\Theta''}{\Theta} - \int_0^u \frac{k^2 du}{ca^2 u} = \frac{u\Theta''}{\Theta} - k^2 \int_0^{(\sigma,\zeta)} \frac{\frac{1}{2} d\zeta}{(1-\zeta)\sigma},$$

$$\text{IV)}\ Z_{11}(u) = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}}(u-K) - \int_K^u \frac{du}{sa^2 u} = \frac{K-E}{K}(u-K) - \int_1^{(\sigma,\zeta)} \frac{\frac{1}{2} d\zeta}{\zeta\sigma}.$$

Entwickelt man das aus II) fliessende Integral für E nach Potenzen von $\varkappa$, E' analog nach Potenzen von $\varkappa'$, so erhält man in Gauss's Bezeichnung

$$\text{V)}\ E = \tfrac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1, \varkappa),\ E' = \tfrac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1, \varkappa').$$

Jacobi giebt, wenn k klein ist, (Gesammelte Werke, Bd. I pag. 349) für E die Näherungsformel

$$\text{VI)}\ E = \sqrt{k'}(1+\sqrt{k'^3})K : (1+\sqrt{k'}) = \sqrt{k'}(1-\sqrt{k'}+k')K.$$

§ 118. Auswerthung der Grössen ϑ, ϑ_{01}, ϑ_{10}. In der Formel I) des vorigen Paragraphen transformiren wir das Integral $\int(1:(1-\varkappa\zeta))du$ durch die Beziehungen

$$(1-\varkappa\zeta)\,du : (1-\varkappa\zeta) = du = du : (1-\varkappa\zeta) - \varkappa\zeta\, du : (1-\varkappa\zeta),$$
$$u(\sigma,\zeta) = \int(1:(1-\varkappa\zeta))\,du - \varkappa\int(\zeta(1-\varkappa\zeta))\,du = \int(1:(1-\varkappa\zeta))\,du - 2\varkappa\,\partial u : \partial\varkappa,$$
$$\int(1:(1-\varkappa\zeta))\,du = u + 2\varkappa\,\partial u : \partial\varkappa,$$

und erhalten so

$$\text{I)}\ Z_{00}(u) = cu + 2\varkappa\varkappa'\frac{\partial u}{\partial\varkappa} = c'u + 2\varkappa\varkappa' K\frac{\partial(u:K)}{\partial\varkappa} = 2\varkappa\varkappa' K\frac{\partial(u:K)}{\partial\varkappa},$$

worin die Constante c' Null ist, weil $Z_{00}(K) = 0$ ist. Lässt man u um $2iK'$ wachsen, so folgt aus I) die uns schon bekannte Relation

$$\text{II)}\ -i\pi : K = 4i\varkappa\varkappa' K\frac{\partial(K':K)}{\partial\varkappa},\ \pi^2 : K^2 = 4\varkappa\varkappa'\frac{\partial\tau}{\partial\varkappa}.$$

Differenzirt man I) nach u, setzt $u = 0$ und wendet dann die Gleichung II) des § 47 an, so folgt

$$\text{III)}\ \frac{2\,\partial\, lg\,\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial\varkappa} = \frac{d\, lg K}{\partial\varkappa} = \frac{\partial\, lg\,\vartheta}{\partial\varkappa},\ \vartheta = \text{Const.}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}.$$

Für $\varkappa = 0$ ist

$$K = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} = \tfrac{1}{2}\pi,\ iK' = \int_1^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} = -i\infty,\ \tau = -\infty,\ \vartheta = 1,$$

und also Const. $= 1$, und weiter (vergl. § 55)

$$\text{IV)}\ \vartheta = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},\ \vartheta_{01} = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}},\ \vartheta_{10} = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}.$$

§ 119. **Rectification der Ellipse.** Ist a die grosse, b die kleine Halbachse einer auf die rechtwinkligen Coordinaten x, y bezogenen Ellipse und p (die Polhöhe) der Winkel, den die Normale mit der grossen Achse oder der positiven x-Achse macht, und ist $k=\sqrt{(aa-bb):aa}$ die numerische Excentricität, so hat man die Gleichungen:

$$\cos p=\frac{x}{aa}:\sqrt{\frac{xx}{a^4}+\frac{yy}{b^4}},\quad \sin p=\frac{y}{bb}:\sqrt{\frac{xx}{a^4}+\frac{yy}{b^4}},\quad tg\, p=\frac{aay}{bbx},$$

$$tg^2 p=\frac{a^4y^2}{b^4x^2}=\frac{a^4}{b^2x^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{a^2(a^2-x^2)}{b^2x^2},$$

$$xx=\frac{a^4}{aa+bb\, tg^2 p}=\frac{aa\cos^2 p}{1-k^2\sin^2 p},\quad x=\frac{a\cos p}{\sqrt{1-k^2\sin^2 p}}=\frac{a\cos p}{\Delta p},$$

$$yy=\frac{b^4 tg^2 p}{aa+bb\, tg^2 p}=\frac{b^4\sin^2 p}{a^2(1-k^2\sin^2 p)},\quad y=\frac{b^2\sin p}{a\sqrt{1-k^2\sin^2 p}}=\frac{ak'^2\sin p}{\Delta p},$$

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{ak'^2\sin p}{\Delta^3 p},\quad \frac{dy}{dp}=\frac{ak'^2\cos p}{\Delta^3 p},\quad \frac{ds}{dp}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dp}=\frac{\sqrt{dx\,dx+dy\,dy}}{dp}=\frac{ak'^2}{\Delta^3 p}.$$

Und wenn man $\sin^2 p=\zeta$, $k^2=\varkappa$, $\frac{1}{2}d\zeta:\sigma=du$ setzt, so ist $ds=a\varkappa' du:(1-\varkappa\zeta)$.

Nun werde der Bogen s vom Scheitel der grossen Achse an gemessen, so ist nach Formel II) des § 117, wenn aE den Ellipsenquadranten bedeutet,

$$s:a=Z_{00}(u)+Eu:K.$$

§ 120. **Ein Integral dritter Gattung.** Es ist

$$Z_{01}(u+v)-Z_{01}(u-v)$$
$$=\frac{\Theta'_{01}(u+v)}{\Theta_{01}(u+v)}-\frac{\Theta'_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u-v)}-\frac{2\Theta'_{01}(v)}{\Theta_{01}(v)}=\frac{-2k^2 sa^2 u\, sa\, v\, sa' v}{1-k^2 sa^2 u\, sa^2 v}=\frac{-2sa' v}{sa\, v}\,\frac{1-(1-k^2 sa^2 u\, sa^2 v)}{1-k^2 sa^2 u\, sa^2 v}.$$

Integrirt man über u, so erhält man weiter

$$\frac{sa' v}{ca\, v}\int_0^u\frac{du}{1-k^2 sa^2 u\, sa^2 v}=u\left(\frac{sa' v}{sa\, v}+\frac{\Theta'_{01}(v)}{\Theta_{01}(v)}\right)+\frac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u+v)}=u\frac{\Theta'_{11}(v)}{\Theta_{11}(v)}+\frac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u+v)},$$

oder in der Jacobi'schen Bezeichnungsweise des Integrales dritter Gattung

$$\text{I)}\quad \Pi(u,v)=uZ_{01}(v)+\frac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u+v)}=\int_0^u\frac{k^2 sa\, v\, ca\, v\, da\, v\, sa^2 u\, du}{1-k^2 sa^2 u\, sa^2 v}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\varkappa\sqrt{a(1-a)(1-\varkappa a)}\,\zeta\, d\zeta}{(1-a\varkappa\zeta)\sigma},$$
$$\sqrt{a}=sa\, v.$$

Vertauscht man in I) u mit v, und zieht die so entstehende Gleichung von I) ab, so erhält man die unter dem Namen „Vertauschung von Parameter und Argument" bekannte Beziehung

$$\text{II)}\quad \Pi(u,v)-\Pi(v,u)=uZ_{01}(v)-vZ_{01}(u).$$

Das sogenannte Additionstheorem dieser Function, sowohl in Bezug auf das Argument u, als auch in Bezug auf den Parameter v, kann leicht a posteriori bewiesen werden, was dem Leser überlassen bleibt. Die betreffenden Formeln sind:

$$\text{III)}\quad \Pi(u+t,v)-\Pi(u,v)-\Pi(t,v)=\frac{1}{2}lg\frac{1+k^2 sa\, u\, sa\, t\, sa\, v\, sa(u+t+v)}{1-k^2 sa\, u\, sa\, t\, sa\, v\, sa(u+t-v)},$$

$$\text{IV)}\quad \Pi(u,v+w)-\Pi(u,v)-\Pi(u,w)+k^2 u\, sa\, v\, sa\, w\, sa(v+w)=\frac{1}{2}lg\frac{1+k^2 sa\, u\, sa\, v\, sa\, w\, sa(v+w+u)}{1-k^2 sa\, u\, sa\, v\, sa\, w\, sa(v+w-u)}.$$

Unmittelbar aus der Betrachtung der Darstellung durch Thetafunctionen folgen die Specialwerthe

$$\text{V)}\quad \Pi(K,v)=KZ_{01}(v),\quad \Pi(2iK',v)=2iK'Z_{01}(v)+vi\pi:K,\quad \Pi(u,K)=0,\quad \Pi(u,K+iK')=0,$$
$$\Pi(0,v)=0,\quad \Pi(K+iK',v)=(K+iK')Z_{01}(v)+i\pi v:2K,\quad \Pi(iK',v)=iK'Z_{01}(v)+(i\pi v:2K)+\frac{1}{2}i\pi,$$
$$\text{VI)}\quad K\Pi(K+iK',v)-(K+iK')\Pi(K,v)=\frac{1}{2}i\pi v,\quad \Pi(-u,v,k)=-\Pi(u,v,k).$$

Die Periodicität aber ist in den Gleichungen enthalten

$$\text{VII)}\quad \Pi(u+2K,v)=\Pi(u,v)+2KZ_{01}(v),\ \Pi(u,v+2K)=\Pi(u,v),\ \Pi(u,v+2iK')=\Pi(u,v),$$
$$\Pi(u+2iK',v)=\Pi(u,v)+2\Pi(K+iK',v)-2\Pi(K,v)=\Pi(u,v)+2iK'Z_{01}(v)+i\pi v:K.$$

Das Integral hat demnach am Querschnitt a den Periodicitätsmodul $2KZ_{01}(v)$, bei b den Periodicitätsmodul $2iK'Z_{01}(v)+i\pi v:K$. Aus der Transformation der Thetafunctionen, die sich auf den Modul k beziehen, in solche, die sich auf den Modul k' beziehen, findet man die Beziehungen

$$\text{VIII)}\quad \Pi(iu,iv+K)=\Pi(u,v+K',k'),\ \Pi(iu,v+K)=-\Pi(u,iv+K',k').$$

§ 121. **Andere Integrale dritter Gattung.** Die Function $\Pi(u,v)$ wird hauptsächlich angewandt, wenn $\sqrt{a}$ reell und absolut genommen kleiner als Eins ist. Ist a negativ, $\sqrt{a}$ rein imaginär, so ist (bei reellem $k<1$) $\sqrt{a}=saiv$, der Parameter rein imaginär, was sich nicht vermeiden lässt. Aber es liegt kein Grund vor, für manche Fälle bequemere Formeln herzuleiten, indem man sich nicht blos des Logarithmus der Function Θ_{01} bedient, sondern auch der Thetafunctionen mit den andern Charakteristiken. Sich gerade der Function $\Pi(u,v)$ zur Darstellung zu bedienen, ist traditionell, aber durchaus nicht nöthig. Die Ableitung neuer ähnlicher Formeln erfordert keine andern Methoden, als die im vorigen Paragraphen angewandten. Auf diese Herleitung Verzicht leistend, stellen wir eine Reihe solcher Formeln zusammen, die von Jacobi (Gesammelte Werke I, pag. 537) gegeben sind, und in denen $\sqrt{a}=sav$, $\sigma(a)=\sqrt{a(1-a)(1-\varkappa a)}$ ist.

$$\text{I)}\quad uZ_{01}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(v-u)}{\Theta_{01}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\sigma(a)\varkappa\zeta\,d\zeta}{(1-\varkappa a\zeta)\sigma},\qquad uZ_{11}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(v-u)}{\Theta_{01}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\sigma(a)\,d\zeta}{a(1-\varkappa a\zeta)\sigma},$$

$$\text{II)}\quad uZ_{10}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(v-u)}{\Theta_{01}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{-\frac{1}{2}\sigma(a)(1-\varkappa\zeta)d\zeta}{(1-a)(1-\varkappa a\zeta)\sigma},\quad uZ_{00}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u+v)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{-\frac{1}{2}\varkappa\,\sigma(a)(1-\zeta)d\zeta}{(1-\varkappa a)(1-\varkappa a\zeta)\sigma},$$

$$\text{III)}\quad uZ_{01}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{11}(v-u)}{\Theta_{11}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\sigma(a)d\zeta}{(\zeta-a)\sigma},\qquad uZ_{11}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{11}(v-u)}{\Theta_{11}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\sigma(a)\zeta\,d\zeta}{a(\zeta-a)\sigma},$$

$$\text{IV)}\quad uZ_{10}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{11}(v-u)}{\Theta_{11}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\sigma(a)(1-\zeta)d\zeta}{(1-a)(\zeta-a)\sigma},\quad uZ_{00}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{11}(v-u)}{\Theta_{11}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\sigma(a)(1-\varkappa\zeta)d\zeta}{(1-\varkappa a)(\zeta-a)\sigma},$$

$$\text{V)}\quad uZ_{01}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{10}(v-u)}{\Theta_{10}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\sigma(a)(1-\varkappa\zeta)d\zeta}{(1-a-(1-\varkappa a)\zeta)\sigma},\quad uZ_{11}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{10}(v-u)}{\Theta_{10}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\sigma(a)(1-\zeta)d\zeta}{a(1-a-(1-\varkappa a)\zeta)\sigma},$$

$$\text{VI)}\quad uZ_{10}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{10}(v-u)}{\Theta_{10}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\varkappa'\sigma(a)\zeta\,d\zeta}{(1-a)(1-a-(1-\varkappa a)\zeta)\sigma},$$

$$uZ_{10}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{10}(u-v)}{\Theta_{10}(v+u)}=\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\sigma(a)\varkappa'd\zeta}{(1-\varkappa a)(1-a-(1-\varkappa a)\zeta)\sigma}.$$

Man kann die Verwandtschaft dieser Formeln durch die Bemerkung ins Licht setzen, dass die Reduction auf die Normalform keine völlig bestimmte Operation ist. Ist nämlich

$$F(\sigma,\zeta)=\int(1:(\zeta-a))\,du=\tfrac{1}{2}\int d\zeta:(\zeta-a)\sigma,$$

so lassen sich mehrere Functionen $f(\sigma,\zeta)$ angeben, welche im Punkte $-\sigma_a, a$ unendlich gross, im Punkte σ_a, a unendlich klein werden, und ausserdem nur in **einem** Punkte $-\sigma_b, b$ unendlich werden, und in dem darüberliegenden σ_b, b verschwinden. Dann ist aber $F(\sigma,\zeta)-(lg\,f(\sigma,\zeta)):2\sigma_a$ eine Function, die nur in zwei über b liegenden Punkten der Fläche T logarithmisch unendlich gross wird, und sie kann sich demnach von einem Normalintegral dritter Gattung nur durch ein Integral erster Gattung unterscheiden. Die Function f ist in der Form $(\psi(a)\sigma-\psi(\zeta)\sigma_a):(\psi(a)\sigma+\psi(\zeta)\sigma_a)$ enthalten, worin ψ eine ganze

Function zweiten Grades ist, die in zwei Verzweigungspunkten verschwindet. Beschränken wir uns auf den Fall, dass diese die Punkte Null und Unendlich sind, so ist

$$f(\sigma,\zeta)=(a\sigma-\zeta\sigma_a):(a\sigma+\zeta\sigma_a),$$

$$\frac{d\,lg\,f(\sigma,\zeta)}{d\zeta}=\frac{\sigma_a}{\sigma}\frac{1-\varkappa\zeta^2}{(\zeta-a)(1-a\varkappa\zeta)}=\frac{\sigma_a}{a\sigma}-\frac{\sigma_a}{a\sigma(1-a\varkappa\zeta)}+\frac{\sigma_a}{(\zeta-a)\sigma},$$

$$\text{VII)}\quad\int\frac{\sigma_a\,du}{(\zeta-a)}=-\frac{u\sigma_a}{a}+\tfrac{1}{2}\,lg\frac{a\sigma-\zeta\sigma_a}{a\sigma+\zeta\sigma_a}+\int\frac{\sigma_a du}{a(1-a\varkappa\zeta)}.$$

Herr Weierstrass bedient sich einer Normalform, die im unendlich fernen Verzweigungspunkte seines Normalbereiches und in nur einem gewöhnlichen Punkte logarithmisch unendlich gross wird.

Zusätze und Nachträge.

§ 122. Zusatz zu § 30. Ist $w(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiete S der z-Ebene eine reguläre endliche Function, und bildet sich der Rand s von S in der w-Ebene auf eine knotenlose, ein einfach zusammenhängendes Stück Σ begrenzende Linie σ ab, so bedecken die Werthe w, welche S entsprechen, das Innere Σ dieser Linie einfach und überall.

Ist w_0 ein Punkt im Innern von Σ, so wächst $lg(w-w_0)$, wenn w um Σ geführt wird, um $2i\pi$, welches die scheinbare mit i multiplicirte Grösse der knotenlosen Linie σ, von einem Punkte im Innern aus gesehen, ist. Führt man nun z über s um S positiv herum, so wächst $lg(w-w_0)$ ebenfalls um $2i\pi$, weil dies genau dasselbe ist, als ob w über σ geführt würde. Da nun w nach der Voraussetzung in S nicht unendlich gross wird, so muss $w(z)-w_0$ einmal in S Null werden, $w(z)$ nimmt jeden Werth w_0 im Innern von Σ einmal und nur einmal an.

Hieraus folgt als Corollar, dass $w'(z)$ im Innern von S nicht verschwinden kann. Denn ist $w'(z_0)=0$, also

$$w(z)-w_0=\frac{w''(z_0)(z-z_0)^2}{1.2}+\frac{w'''(z_0)(z-z_0)^3}{1.2.3}+\frac{w''''(z_0)(z-z_0)^4}{1.2.3.4}+\dots,$$

so lässt sich $z-z_0$ nach Potenzen von $\sqrt{w-w_0}$ (oder auch, wenn noch $w''(z_0)=0$ ist, nach Potenzen höherer Wurzeln) entwickeln, und zu einem Werthe von $w-w_0$ gehören zwei Werthe von z, welche, wenn man $w-w_0$ klein genug nimmt, beide in S liegen. Es würden demnach zwei verschiedene Werthe von z in S demselben Werthe in Σ entsprechen, es müsste w einen Werth w_0 in S zweimal annehmen, was, wie wir bewiesen haben, nicht möglich ist.

§ 123. Ein specieller Fall. Betrachtet man die Grösse $\varkappa=\vartheta_{10}^4:\vartheta^4$ als Function des Moduls τ der Thetafunctionen, und lässt zuerst τ von $-\infty$ an, für welchen Werth $\varkappa$ Null ist, bis zu Null wachsen, so durchläuft $\varkappa$ (nach § 57) die reellen Werthe zwischen 0 und 1 wachsend einmal und nur einmal. Durchläuft weiter τ einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt der Punkt $\frac{1}{2}i\pi$ der τ-Ebene ist, der den Radius $\frac{1}{2}\pi$ hat, und auf dem der reelle Theil von τ negativ ist, so kann man dort eine neue Variabele τ' durch die Gleichung $\tau=i\pi\tau':(\tau'+i\pi)$ der Art einführen, dass τ den Halbkreis durchläuft, wenn τ' von 0 bis $-\infty$ reell sich ändert. Es ist aber nach § 66

$$\vartheta_{10}^4:\vartheta^4=\vartheta_{10}^4(0,i\pi\tau':(\tau'+i\pi)):\vartheta^4(0,i\pi\tau':(\tau'+i\pi))=\vartheta^4(0,\tau'):\vartheta_{10}^4(0,\tau')=1:\varkappa(\tau').$$

Durchläuft τ' die reellen Werthe von 0 bis $-\infty$, τ den Halbkreis, so durchläuft $\varkappa(\tau)=1:\varkappa(\tau')$ alle reellen Werthe von 1 bis $+\infty$ einmal und nur einmal.

Durchläuft weiter τ die der negativ reellen Achse parallele Gerade von $i\pi$ bis $-\infty$, so setze man $\tau=\tau'+i\pi$, so dass τ' reell von 0 bis $-\infty$ abnimmt. Dann ist nach § 66

$$\varkappa(\tau)=\frac{\vartheta_{10}^4(0,\tau'+i\pi)}{\vartheta^4(0,\tau'+i\pi)}=\frac{-\vartheta_{10}^4(0,\tau')}{\vartheta_{01}^4(0,\tau')}=\frac{-\vartheta_{10}^4(0,\tau')}{\vartheta^4(0,\tau')}:\frac{\vartheta_{01}^4(0,\tau')}{\vartheta^4(0,\tau')}=\frac{-\varkappa(\tau')}{\varkappa'(\tau')},$$

und es durchläuft $\varkappa$ negativ reelle Werthe von $-\infty$ bis 0. Wird also τ über die Begrenzung des auf Seite 117 gezeichneten Dreiecks D_o positiv herum geführt, so läuft $\varkappa$ über die Begrenzung der Halbebene S_o, in der die $\varkappa$ positiv imaginäre Theile haben, positiv ohne Umkehr. — Ist $\varkappa_0$ ein Werth von $\varkappa$ in S_o, so wächst $lg(\varkappa-\varkappa_0)$, wenn τ um die Begrenzung von D_o geführt wird, um $2i\pi$. Denn da $\varkappa$ über die ganze, im Unendlichen geschlossene, reelle Achse läuft, so ist dieser Zuwachs die mit i multiplicirte scheinbare Grösse dieser Linie von $\varkappa_0$ aus gesehen, und diese scheinbare Grösse ist (weil die Achse im Unendlichen als geschlossen zu denken ist) 2π. Es fragt sich aber, ob der benutzte Satz des § 20 so ohne Weiteres angewandt werden darf, erstens, weil die Begrenzung von D_o sich ins Unendliche erstreckt, und zweitens, weil $\varkappa$ auf der Begrenzung für $\tau=i\pi$ unendlich gross wird. Um die Schlussweise strenger zu machen, ändern wir D_o etwas ab. Unter D_o^* verstehen wir eine Figur, die aus D_o entsteht, wenn wir erstens die Punkte $\tau=-\omega$, $\tau=-\omega+i\pi$, wo ω sehr gross reell ist, mit einander durch eine Linie λ_1 verbinden, und das jenseits dieser Linie liegende Stück von D_o fortlassen, und wenn wir zweitens zwei sehr nahe an $i\pi$ liegende Punkte, den einen auf dem Begrenzungshalbkreise, den andern auf der Begrenzungsgeraden, durch eine sehr kurze Linie λ_2 verbinden und durch sie eine sehr kleine Ecke abschneiden. Es sei auf ihr $z=i\pi+\varepsilon$, wo ε absolut genommen sehr klein ist und einen negativ reellen Theil hat. D_o^* ist ein Theil von D_o, der mit D_o mehr und mehr übereinstimmt, wenn man ω gross genug und ε klein genug macht.

Auf der Linie λ_1 ist (nach den Regeln der Division von Potenzreihen)

$$\varkappa=2e^{\tau}(1+A_1e^{\tau}+A_2e^{2\tau}+\ldots),$$

und es übertrifft das erste Glied dieser Reihe die übrigen beliebig vielmal, wenn man ω gross genug nimmt. Es entspricht demnach der Linie λ_1 eine Linie L_1 der $\varkappa$-Ebene, von der es zu wissen genügt, dass sie dem Punkte Null, den sie in nahezu halbkreisförmiger Figur umgiebt, überall beliebig nahe kommt, so dass sie ein Stück von der Halbebene S_o abtrennt, welches beliebig klein wird, wenn ω gross genug genommen wird. Um $\varkappa$ längs der Linie λ_2 zu untersuchen, wo $\tau=i\pi+\varepsilon$ ist, beachten wir, dass $\varkappa=-\vartheta_{10}^4(0,\varepsilon):\vartheta_{01}^4(0,\varepsilon)=-\vartheta_{01}^4(0,\pi^2:\varepsilon):\vartheta_{10}^4(0,\pi^2:\varepsilon)$ (nach § 66) ist. Mithin ist $\varkappa$ sehr gross, und es durchläuft $\varkappa$ eine Linie L_2, wenn τ λ_2 durchläuft, von der zu wissen genügt, dass sie überall vom Punkte Null sehr weit entfernt ist und von S_o ein Stück abschneidet, welches mit abnehmendem ε grösser und grösser wird. Das Stück S_o^* von S_o wird von der reellen Achse und den beiden Linien L_1 und L_2 begrenzt. Ist nun $\varkappa_0$ ein Punkt in S_o^*, so ist die scheinbare Grösse der Begrenzung dieses Gebietes von $\varkappa_0$ aus gesehen 2π, und es wächst $lg(\varkappa-\varkappa_0)$ um $2i\pi$, wenn τ über die Begrenzung von D_o^* geführt wird, es nimmt $\varkappa$ den Werth $\varkappa_0$ (da $\varkappa$ in D_o^* endlich bleibt) einmal und nur einmal an. Dies gilt aber für jeden Punkt im Innern der Halbebene S_o. Denn wie dieser Punkt in S_o auch liegen mag, so kann man immer durch Annahme eines hinreichend grossen Werthes von ω und eines hinreichend kleinen Werthes von ε D_o^* so bestimmen, dass jener Punkt ins Innere von S_o fällt, so dass $\varkappa_0$ einem Werthe τ_0 von τ in D_o^* entspricht. Also nimmt, was zu beweisen war, $\varkappa$ jeden Werth $\varkappa_0$ für einen Werth von τ in D_o einmal und nur einmal an. S_o und D_o entsprechen sich ein-eindeutig, woraus zugleich folgt, dass es zu jedem $\varkappa$ auch wirklich ein zugehöriges τ giebt. (Vergl. § 105.)

§ 124. **Satz des Herrn Picard.** Eine nicht constante ganze transcendente Function, welche zwei Werthe a, b nicht annimmt, existirt nicht. Ist $F(z)$ eine solche Function, so ist $G(z)=(F(z)-a):(b-a)$ eine ganze transcendente Function, welche die Werthe 0 und 1 nicht annimmt; es genügt demnach, zu erweisen, dass eine nicht constante ganze Function nicht existirt, die die Werthe 0 und 1 nicht annimmt. Dass eine solche Function transcendent sein muss, versteht sich von selbst, weil eine ganze rationale Function jeden Werth so oft annimmt, als ihr Grad angiebt.

Setzt man $G(z)=\varkappa$ und zeichnet in der z-Ebene einen geschlossenen Zug, so entspricht demselben in der $\varkappa$-Ebene wegen der Eindeutigkeit von $G(z)$ ebenfalls ein geschlossener Zug. Die Anzahl der Umkreisungen dieses zweiten Zuges um den Punkt 0 oder den Punkt 1 der $\varkappa$-Ebene ist Null, oder

die scheinbare Grösse dieses Zuges, vom Punkte 0 oder Punkte 1 der x-Ebene aus gesehen, ist Null. Denn wird z über jenen Zug der z-Ebene geführt, so wächst $lg x = \int (G'(z):G(z))\,dz$ um Nichts, weil $G(z)$ nicht Null wird, und ebenso wächst $lg(x-1)$ um Nichts, weil $G(z)-1$ nicht Null wird, woraus eben folgt, dass die scheinbare Grösse des Bildzuges in der x-Ebene in Bezug auf Null oder Eins Null ist. Es giebt daher in der z-Ebene keinen Zug, dessen Bild in der x-Ebene den Punkt 0 oder den Punkt 1 allein ein oder mehrere Male in derselben Richtung umkreist, ohne ihn ebenso oft in entgegengesetzter Richtung zu umkreisen. — Zeichnet man nun in der z-Ebene, von z_0 anfangend, einen geschlossenen Zug Z_1, der so beschaffen ist, dass die grösste Schwankung von $G(z)$, d. h. die dem absoluten Betrage nach grösste Differenz der Werthe von $G(z)$ auf Z_1, kleiner als Eins ist, so kann das Bild dieses Zuges in der x-Ebene nur einen der beiden Punkte 0, 1 umkreisen, und zwar muss dies, wenn es n-mal positiv herum geschieht, auch n-mal negativ herum geschehen, weil eben die Summe der Umkreisungen Null ist. Die Function $\tau = \tau(x) = \tau(G(z))$, dieselbe Modulfunction, die wir bisher so bezeichnet haben, wird, wenn z von z_0 über Z_1 nach z_0 stetig zurück geführt wird, zuletzt denselben Werth wieder erlangen, den sie zuerst hatte; denn wenn auch x den Punkt 0 oder 1 n-mal positiv umkreist, so muss sie ihn doch ebenso oft negativ umkreisen, ohne den andern mit zu umkreisen, und es gewinnt deshalb τ seinen alten Werth wieder.

Schalten wir nun aus Z_1 ein Stück $\overline{z_1 z_2}$ aus, wo $z_1 z_2$ in der Zugrichtung auf einander folgen, und schalten dafür einen in z_1 beginnenden, in z_2 endenden Zug Z_2 ein, so dass die grösste Schwankung von $x = G(z)$ auf $Z_2 + \overline{z_1 z_2}$ kleiner als Eins ist, so bleibt τ ungeändert, wenn z von z_1 über Z_2 nach z_2 und von da nach z_1 über Z_1 (negativ) geführt wird, aus dem oben angegebenen Grunde. Es bleibt aber auch τ ungeändert, wenn z auf Z_1 von z_0 nach z_1, von da über Z_2 nach z_2, von da über Z_1 (positiv weiter) nach z_0 geführt wird. Dies kann nämlich so geschehen: Man führe z von z_0 nach z_1 über Z_1, von z_1 über Z_2 nach z_2, von z_2 nach z_1 negativ über Z_1, von z_1 nach z_2 nach z_0 positiv über Z_1 zum Anfang zurück. Gelangt z zum ersten Male nach z_1, so hat dort τ einen bestimmten Werth τ_1 angenommen; führt man dann z über Z_2 nach z_2, so nimmt dort τ einen Werth τ_2 an; führt man dann z von z_2 nach z_1 (negativ über Z_1) weiter, so erhält dort τ den vorigen Werth τ_1 nach den hier bewiesenen Sätzen wieder. Führt man dann z nach z_2 (positiv über Z_1) zurück, so erhält τ dort den Werth τ_2 wieder, weil z denselben Weg zweimal vor und zurück durchschreitet. Es ist also ganz gleichgiltig, ob z sich von z_0 nach z_2 auf Z_1 begiebt, oder ob für die Zugstrecke $\overline{z_1 z_2}$ der Zug Z_2 eingeschaltet wird, und es muss demnach, wenn z von z_2 aus (positiv über Z_1) weiter nach z_0 zurückgeführt wird, dort τ seinen Ausgangswerth wieder erhalten. Erweitern wir nun den aus $Z_1 + Z_2$ bestehenden Zug, in dem die Strecke $\overline{z_1 z_2}$ zerstört ist, unter gleichen Bedingungen von neuem u. s. w., so gelangt man zu dem Satze, dass τ im Punkte z_0 jedesmal seinen Werth wieder erlangt, wenn z über einen beliebigen geschlossenen Zug von z_0 zu diesem Punkte zurück geführt wird; wir finden, dass τ in der z-Ebene eine einändrige, einwerthige und, da sie für endliche z endlich bleibt, ganze (transcendente) Function ist. Der reelle Theil von τ wird aber nirgend positiv. Eine solche Function kann nach § 23 nicht anders existiren, als wenn sie constant ist. Demnach muss $G(z)$ eine Constante sein, w. z. b. w.

Ist $F(z)$ eine ganze transcendente Function, die den Werth Null nicht annimmt, so ist $lg\,F(z) = G(z)$ ebenfalls eine ganze transcendente Function. Sie nimmt von den Werthen $lg\,a$, $2i\pi + lg\,a$, $2i\pi - lg\,a, \ldots$ höchstens einen nicht an, und folglich nimmt $F(z)$ den Werth a unendlich oft an. Die Umkehrung von $F(z)$ ist eine unendlich vieldeutige Function.

§ 125. **Entwickelung der Function *dau* in eine trigonometrische Reihe.** Die Entwickelung der elliptischen Functionen in trigonometrische Reihen ist, theils wegen der Langsamkeit, theils wegen der Beschränktheit ihrer Convergenzen, von geringerer Bedeutung, als die Darstellung durch Thetafunctionen. Doch mag die Methode an einem Beispiel kennen gelernt werden, wobei wir K als reell voraussetzen. Wir setzen $u = c\,lg\,z$, wo $c = K:i\pi$ ist, so dass u um $2K$ wächst, wenn z um den Punkt 0 herum geführt wird. Dann seien r_1 und r_2 zwei Kreise um den Punkt Null der z-Ebene, mit den Radien $r_1 < 1$ und $r_2 > 1$, deren Radien so wenig von 1 verschieden sind, dass

zwischen ihnen $da(c\,lg\,z)$ nicht unendlich gross wird, so dass diese Function für das zwischen ihnen liegende Gebiet in die Laurent'sche Reihe (§ 22) entwickelt werden kann. In diesem Ringgebiete besteht die Gleichung

$$2i\pi\,da\,u = 2i\pi\,da(c\,lg\,z) = \mathfrak{S} z^{m-1}\int \zeta^{-m}\,da(c\,lg\,\zeta)\,d\zeta + \mathfrak{S} z^{-m}\int \zeta^{m-1}\,da(c\,lg\,\zeta)\,d\zeta,$$

worin die Integrationen über den Einheitskreis erstreckt werden können. Setzt man dort $\zeta = e^{i\pi t:K}$, so hat man

$$\int \zeta^{-m-1}\,da(c\,lg\,\zeta)\,d\zeta = \frac{i\pi}{K}\int_{-K}^{K} e^{-mi\pi t:K}\,da\,t\,dt,\quad \int \zeta^{m-1}\,da(c\,lg\,\zeta)\,d\zeta = \frac{i\pi}{K}\int_{-K}^{K} e^{mi\pi t:K}\,da\,t\,dt.$$

Diese Integrale haben, weil $da\,t$ eine gerade Function von t ist, denselben Werth, so dass nur eins von ihnen ausgewerthet zu werden braucht. — Erstrecken wir das zweite Integral über die Begrenzung eines Parallelogrammes mit den Ecken $-K$, $+K$, $+K+4niK'$, $-K+4niK'$, so zerstören sich die Integrale über die zur imaginären Periode parallelen Seiten, weil auf ihnen in gegenüberliegenden Punkten $da\,t$ sowohl, als auch die Exponentialfunction denselben Werth, dt aber den entgegengesetzten Werth hat. Das Integral über die Seite $K+4niK'$ bis $-K+4niK'$ ist, wenn $t = t'+4niK'$ gesetzt wird, gleich

$$\int_{K}^{-K} e^{-4nm\pi K':K}\,.\,e^{mi\pi t':K}\,da\,t'\,dt'$$

und geht zur Grenze Null über, wenn für ein positives m die ganze Zahl n positiv über alle Grenzen wächst. Das Integral über das Parallelogramm ist also gleich dem über die Linie von $-K$ bis K wenn n über alle Grenzen wächst. Andrerseits ist es aber gleich der Summe der Residuen der Function $e^{mi\pi t:K}da\,t$ in den Punkten iK', $3iK'$, $5iK'$, ..., multiplicirt mit $2i\pi$. Das Residuum im Punkte $(2l+1)iK'$ hat aber den Werth

$$(-1)^{l+1}i\,e^{-m(2l+1)\pi K':K} = (-1)^{l+1}i\,q^{(2l+1)m},$$

und die Summe derselben, wenn l von 0 bis ∞ alle ganzen Zahlen durchläuft, ist $q^m:(1+q^{2m})$. Daraus folgt

$$da\,u = C + \frac{\pi}{K}\mathfrak{S}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\left(e^{mi\pi u:K}+e^{-mi\pi u:K}\right) = C + \frac{2\pi}{K}\mathfrak{S}\frac{q^m\cos(mu\pi:K)}{1+q^{2m}}.$$

Um C zu bestimmen, multipliciren wir diese Gleichung mit du und integriren zwischen $-K$ und $+K$, so erhält die rechte Seite den Werth $2KC$. Aber das Integral $\int da\,u\,du$ ist die Hälfte des über das Rechteck $-K$, $+K$, $+K+2iK'$, $-K+2iK'$ erstreckten Integrales, weil die Integrationen über die unter dem Winkel $arc\,iK'$ gegen die reelle Achse geneigten Seiten sich zerstören, die über die zur reellen Achse parallelen Seiten wegen der Eigenschaft $da(u+2iK') = -da\,u$ einander gleich sind. Dieses Integral ist aber gleich dem mit $2i\pi$ multiplicirten Residuum der Function $da\,u$ im Punkte iK', also gleich $2i\pi\,.-i = 2\pi$, also ist $C = \pi:2K$. Für $u=0$ ergiebt diese Darstellung

$$2K:\pi = 1+\mathfrak{S}\,q^m:(1+q^{2m}) = 1+\mathfrak{S}_m\mathfrak{S}_{m'}(-1)^{m'+1}q^{m(2m'-1)}.$$

Hieran lässt sich eine zahlentheoretische Bemerkung von **Jacobi** schliessen. Es ist

$$2K:\pi = \vartheta^2 = (1+2\mathfrak{S}\,q^{m^2})(1+2\mathfrak{S}\,q^{m^2}).$$

Multiplicirt man dies Product aus, so erhält man eine nach Potenzen von q fortschreitende Reihe, deren Exponenten **alle** die Zahlen sind, welche als **Summe zweier Quadrate** darstellbar sind. Betrachten wir hiervon nur die Primzahlen und vergleichen die Reihe mit der $2K:\pi$ darstellenden Doppelsumme, welche ebenfalls eine Potenzreihe von q ist, und in welcher offenbar von den ungeraden Primzahlen nur die von der Form $4n+1$ vorkommen, die von der Form $4n+3$ aber nicht, so erhält man den zahlentheoretischen Satz: *Jede Primzahl von der Form $4n+1$ ist als Summe zweier Quadrate darstellbar, jede Zahl von der Form $4n+3$ aber nicht.*

§ 126. **Reduction des Bereiches s, z; $s = \sqrt{(a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4)}$.** Ist die Adjuncte s des Bereiches s, z die Quadratwurzel einer ganzen Function vierten Grades in z, so kann man für z durch lineare Substitution eine neue Grundgrösse einführen, und für s eine neue Adjuncte, die eine Quadratwurzel aus einer ganzen Function vom dritten Grade ist, wenn man eine Wurzel der Gleichung $s^2=0$ kennt. Diese linearen Substitutionen sind aber nicht die einzigen, durch die man den Bereich s, z in einen ihm congruenten von der gewünschten Eigenschaft überführen kann. Nimmt

man als Grundgrösse des Bereiches eine Function $\mathfrak{z}$ zweiter Ordnung, deren Werthe für dasselbe s nicht in Gruppen untereinander gleicher zerfallen, so besteht nach § 83 zwischen s und $\mathfrak{z}$ eine Gleichung vom zweiten Grade in s und vom vierten Grade in $\mathfrak{z}$. Die Verzweigungsstellen des Bereiches $s, \mathfrak{z}$ sind die, in denen, mit Riemann zu reden, $d\mathfrak{z}$ unendlich klein zweiter Ordnung wird, oder in denen sich $\mathfrak{z}$ in die Form $A + * + C(z-z')^2 + D(z-z')^3 + \ldots$ entwickeln lässt, also in eine Potenzreihe, in der die erste Potenz fehlt. Man kann nun die in $\mathfrak{z}$ willkürlichen Constanten so einrichten, dass dies für einen bestimmten beliebig gegebenen Werth von $\mathfrak{z}$ geschieht. Dieser ist dann eine Verzweigungsstelle. Nimmt man für $\mathfrak{z}$ eine ganze Function zweiter Ordnung von s und z, so muss dieselbe, wenn sie nicht eine lineare Function von z allein ist, in einem der beiden unendlich fernen Punkte des Bereiches unendlich gross zweiter Ordnung werden, im andern endlich bleiben. Eine solche Function ist

$$\mathfrak{z} = a_0 z^2 + 2a_1 z + c + \sqrt{a_0}\, s,$$

worin c willkürlich ist. Entwickelt man diesen Ausdruck für sehr grosse Werthe von z nach absteigenden Potenzen dieser Grösse, so hat die Entwickelung für das eine Vorzeichen von s die Form $\mathfrak{z} = Az^2 + A_1 z + A_2 + A_3 z^{-1} + \ldots$, woraus umgekehrt folgt

$$z = A'\sqrt{\mathfrak{z}} + A'_0 + A'_1\sqrt{\mathfrak{z}^{-1}} + A'_2\sqrt{\mathfrak{z}^{-2}} + \ldots,$$

so dass dort z und also auch s eine zweiändrige Function von $\mathfrak{z}$ ist. Die Entwickelung für das andere Zeichen von s beginnt mit der Constanten, und z ist für diese Stelle eine reguläre Function von $\mathfrak{z}$. Der s, z congruente Bereich $s, \mathfrak{z}$ enthält demnach eine Grundgrösse $\mathfrak{z}$, für welche ein Verzweigungswerth unendlich ist, und man kann nun leicht für s eine Adjuncte $\mathfrak{s}$ einführen, so dass $\mathfrak{s}^2$ eine ganze Function dritten Grades von $\mathfrak{z}$ ist. Um die auszuführenden Rechnungen zu erleichtern, machen wir die, die Allgemeinheit offenbar nicht beschränkende Annahme, dass $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ sei, und setzen $c = 0$. Alsdann ist

$$s^2 = z^4 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4, \quad \mathfrak{z} = z^2 + s.$$

Hieraus ergiebt sich

$$(\mathfrak{z}-s)^2 + 6a_2(\mathfrak{z}-s) + 4a_3 z + a_4 = s^2, \quad \mathfrak{z}^2 + 6a_2\mathfrak{z} + a_4 - 2s(\mathfrak{z}+3a_2) = -4a_3 z,$$

$$(\mathfrak{z}^2 + 6a_2\mathfrak{z} + a_4 - 2s(\mathfrak{z}+3a_2))^2 = 16a_3^2(\mathfrak{z}-s).$$

Diesen Ausdruck multipliciren wir mit $(\mathfrak{z}+3a_2)^2$ und finden so

$$[(\mathfrak{z}^2 + 6a_2\mathfrak{z} + a_4)(\mathfrak{z}+3a_2) - 4a_3^2 - 2s(\mathfrak{z}+3a_2)^2]^2 = 16a_3^2\mathfrak{z}(\mathfrak{z}+3a_2)^2 + 16a_3^4 - 8a_3^2(\mathfrak{z}+3a_2)(\mathfrak{z}^2 + 6a_2\mathfrak{z} + a_4).$$

Wenn man jetzt $\mathfrak{s}$ für $(\mathfrak{z}^2 + 6a_2\mathfrak{z} + a_4)(\mathfrak{z}+3a_2) - 4a_3^2 - 2s(\mathfrak{z}+3a_2)^2$ einführt, so ist der Bereich $\mathfrak{s}, \mathfrak{z}$ dem Bereiche s, z congruent, und $\mathfrak{s}$ ist die Quadratwurzel eines Ausdruckes vom dritten Grade. Zu dieser Transformation ist die Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade nicht nöthig.

§ 127. Eine Transformation zweiter Ordnung. Es sei $\bar{\vartheta}_{hg}(z) = \vartheta_{hg}(z, \frac{1}{2}\tau)$, $\vartheta_{hg}(z) = \vartheta_{hg}(z, \tau)$, so ist $\bar{\vartheta}_{hg}(z)$ eine Thetafunction zweiter Ordnung in Bezug auf die Perioden $i\pi, \tau$ (siehe § 50), mit der Charakteristik $h, 0$. $\bar{\vartheta}_{11}(z)$ verschwindet für $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}\tau$. Es kann sich deshalb diese Function von der Thetafunction zweiter Ordnung mit derselben Charakteristik, $\vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}(z)$, nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Es ist $\bar{\vartheta}_{11}(z) = \alpha\vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}(z)$. Die Function $\bar{\vartheta}_{01}(z)$ aber ist eine Function zweiter Ordnung mit der Charakteristik $0, 0$, sie ist deshalb nach § 50 in der Form $\bar{\vartheta}_{01}(z) = \beta\vartheta_{01}^2(z) + \gamma\vartheta_{11}^2(z)$ darstellbar, worin β, γ Constanten sind. Dividirt man die eine dieser Gleichungen durch die andre, setzt $-ui\pi : 2K$ für z, $\tau = -\pi K' : K$, führt die elliptischen Functionen ein, deutsche Bezeichnung für die zum Modul $\frac{1}{2}\tau$ gehörenden benutzend, so erhält man die Beziehung

$$\mathfrak{sa}(Mu) = \alpha' sa\,u : (1 + \gamma' sa^2 u).$$

Für $u = K$ folgt $1 = \alpha' : 1 + \gamma'$. Da ferner $\mathfrak{sa}(\frac{1}{2}MiK') = \infty$, $sa^2\frac{1}{2}iK' = -1 : k$ ist, so muss $\gamma = k$ sein. Dividirt man beiderseits mit u und geht zur Grenze Null über, so folgt $M = \alpha' = 1 + k$. Daraus ergiebt sich die Transformationsformel

$$\mathfrak{sa}((1+k)u) = (1+k) sa\,u : (1 + k\, sa^2 u).$$

Den Modul der deutsch bezeichneten Function findet man, für $u = K + \frac{1}{2}iK'$, er ist $\mathfrak{k} = 2\sqrt{k} : (1+k)$. Es ist noch $\mathfrak{ca}((1+k)u) = ca\,u\, da\,u : (1 + k\, sa^2 u)$, $\mathfrak{da}((1+k)u) = (1 - k\, sa^2 u) : (1 + k\, sa^2 u)$.

§ 128. Eine zweite Transformation zweiter Ordnung. Zu einer andern Transformation zweiter Ordnung, der sogenannten Landen'schen Transformation, gelangt man durch Betrachtung der

Thetafunctionen zweiter Ordnung $\overline{\vartheta}_{hg}(z) = \vartheta_{hg}(2z, 2\tau)$, deren Charakteristik $0, g$ ist. Die Function $\overline{\vartheta}_{11}(2z)$ verschwindet für $z = 0$ und für $z = \frac{1}{2} i\pi$. Sie kann sich demnach von der Thetafunction zweiter Ordnung mit derselben Charakteristik $\vartheta_{11}(z)\vartheta_{10}(z)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Die Thetafunction zweiter Ordnung $\overline{\vartheta}_{01}(2z)$ verschwindet für $z = \frac{1}{2}\tau$, $z = \frac{1}{2} i\pi + \frac{1}{2}\tau$ und kann sich demnach von $\vartheta(z)\vartheta_{01}(z)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Durch Division der so erhaltenen Gleichungen, durch Einführung von u und der elliptischen Functionen, die wir deutsch bezeichnen, wenn sie zum Modul 2τ gehören, folgt $\mathfrak{sa}\, Mu = \alpha\, sa\, u\, ca\, u : da\, u$, worin α constant ist. Für $u = \frac{1}{2}K$ wird die linke Seite 1, die rechte aber gleich $\alpha : (1 + k')$, so dass $\alpha = 1 + k'$ ist. Dividirt man beiderseits mit u und geht zur Grenze 0 über, so folgt $M = \alpha = (1 + k')$. Somit gewinnt man die Gleichungen

$$\mathfrak{sa}(1+k')u = (1+k')\, sa\, u\, ca\, u : da\, u,$$

$$\mathfrak{ca}(1+k')u = (1-(1+k')sa^2 u) : da\, u, \quad \mathfrak{da}(1+k')u = (1-(1-k')sa^2 u) : da\, u.$$

Der Modul $\mathfrak{k}$ aber der deutsch bezeichneten Functionen ergiebt sich für $u = \frac{1}{2}K + \frac{1}{4}iK'$ und ist $\mathfrak{k} = (1-k') : (1+k')$, $k = 2\sqrt{\mathfrak{k}} : (1+\mathfrak{k})$. Diese Transformation ist benutzt worden, um daran eine directe Auswerthung der elliptischen Integrale durch die Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels zu knüpfen. Vgl. Gauss' Werke III, pag. 333.

§ 129. Die Legendre'sche Bezeichnung. Die Legendre'schen Normalformen der elliptischen Integrale der drei Gattungen gewähren dadurch einen andern Anblick als die hier angegebenen, dass Legendre für die Variabele z eine trigonometrische Function $\sin\varphi$ setzt. $\Delta\varphi$ ist Legendre's Abkürzung für $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$. Bei ihm ist $F(\varphi)$ oder, wenn der Modul mitbezeichnet werden muss, $F(\varphi, k)$ das Integral (erster Gattung) $\int_0^\varphi (1 : \Delta\varphi)\, d\varphi$. Ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so erhält man die von Jacobi mit K bezeichnete Grösse, welche Legendre das vollständige Integral nannte. Die obere Grenze nannte er die Amplitude. Setzt man $u = F(\varphi)$, so ist nach Jacobi $\varphi = am\, u$ die Amplitude von u. Jacobi bildete die trigonometrischen Functionen dieser Grösse und nannte sie elliptische Functionen, die Integrale aber, die bei Legendre elliptische Functionen heissen, nannte er elliptische Integrale. Es ist

$$\Delta\varphi = da\, u, \quad du = d\varphi : \Delta\varphi = d\, am\, u : da\, u, \quad da\, u\, du = d\, am\, u = d\, arc\sin(sa\, u).$$

Mit $E(\varphi)$ bezeichnete Legendre das Integral zweiter Gattung $\int_0^\varphi \Delta(\varphi)\, d\varphi$, und mit E das vollständige Integral von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$. Es ist $Z_{01}(u) = (KE(\varphi) - EF(\varphi)) : K$. Die Legendre'sche Bezeichnung für die Integrale dritter Gattung wird kaum mehr angewandt.

Formeln aus dem Gebiete der elliptischen Functionen.

Die Formeln der hier folgenden Sammlung, deren Zusammenstellung für die Rechnung mit Thetafunctionen und elliptischen Functionen vortheilhaft sein dürfte, sind grossentheils in dem vorstehenden Werkchen hergeleitet. Es sind jedoch unter ihnen auch einige enthalten, welche sich nicht unmittelbar in den vorauf gehenden Blättern vorfinden. Diese sind jedoch ohne zu grosse Mühe mit den gegebenen Mitteln zu entwickeln.

I. Bezeichnungen. Es werde zur Abkürzung gesetzt

$$\mathfrak{S}\varphi(m) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots, \quad \overline{\mathfrak{S}}\varphi(m) = \ldots \varphi(-2) + \varphi(-1) + \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots,$$

$$\mathfrak{P}\varphi(n) = \varphi(0)\varphi(1)\varphi(2)\ldots,$$

wobei m als Summationsbuchstabe, n als Productbuchstabe typisch sein mögen.

Die **geometrische Factorielle**, eine ganze transcendente Function, wird, so lange $abs\, q < 1$ ist, durch die Gleichung definirt

$$w(z) = \mathfrak{P}(1-q^n z) = 1 + \mathfrak{S}(-1)^m z^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} : (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m).$$

Sie genügt der Functionalgleichung $(1-z)w(qz) = w(z)$, und man bildet aus ihr eine eindeutige Function mit zwei wesentlich singulären Stellen durch die Gleichung

$$f(z) = w(z)\,w(q:z) = \mathfrak{P}(1-q^n z)(1-(q^{n+1}:z)) = A\overline{\mathfrak{S}}(-1)^m z^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)},$$

welche Reihenentwickelung aus dem Product leicht mittels der Functionalgleichung $zf(qz) = -f(z)$ fliesst. Schreiben wir sodann q^2 für q und einmal e^{2z} für $-z:q$, ein andermal e^{2z} für $z:q$, und definiren τ (den Modul) durch $\tau = lg\, q$, und verstehen unter $\mathfrak{D}$ eine von z unabhängige Grösse, so erhalten wir die sogenannten Thetafunctionen, definirt durch die Gleichungen

$$1)\ \vartheta(z) = \vartheta_{00}(z) = \overline{\mathfrak{S}}\, e^{\tau mm + 2mz} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{P}(1+q^{2n+1}e^{2z})(1+q^{2n+1}e^{-2z}) = \mathfrak{D}\,\mathfrak{P}(1+2q^{2n+1}\cos 2iz + q^{2(2n+1)}),$$

$$2)\ \vartheta_{01}(z) = \overline{\mathfrak{S}}(-1)^m e^{\tau mm + 2mz} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{P}(1-q^{2n+1}e^{2z})(1-q^{2n+1}e^{-2z}) = \mathfrak{D}\,\mathfrak{P}(1-2q^{2n+1}\cos 2iz + q^{2(2n+1)}) = \vartheta(z \pm i\pi),$$

wo zunächst $\mathfrak{D} = \overline{\mathfrak{S}}\, q^{mm} : \mathfrak{P}(1+q^{2n+1})^2$ ist. Setzt man in 1) und 2) $z + \frac{1}{2}\tau$ für z und multiplicirt nachher 1) mit $e^{z+\frac{1}{4}\tau}$ und 2) mit $e^{z+\frac{1}{4}\tau+\frac{1}{2}i\pi}$, so erhält man die beiden Functionen

$$3)\ \vartheta_{10}(z) = \overline{\mathfrak{S}}\, e^{\tau\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + (2m+1)z} = 2\mathfrak{D}\sqrt[4]{q}\cos iz\,\mathfrak{P}(1+2q^{2n+2}\cos 2iz + q^{4n+4}) = \vartheta(z+\tfrac{1}{2}\tau)\,e^{z+\frac{1}{4}\tau},$$

$$4)\ \vartheta_{11}(z) = \overline{\mathfrak{S}}\, e^{\tau\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + \frac{2m+1}{2}(2z+i\pi)} = 2\mathfrak{D}\sqrt[4]{q}\sin iz\,\mathfrak{P}(1-2q^{2n+2}\cos 2iz + q^{4n+4}) = ie^{z+\frac{1}{4}\tau}\,\vartheta(z+\tfrac{1}{2}\tau+\tfrac{1}{2}i\pi).$$

$\mathfrak{D}$ lässt sich nach Jacobi durch ein Product allein und durch eine Summe allein, nämlich durch

$$5)\ \mathfrak{D} = \mathfrak{P}(1-q^{2n+2}) = \overline{\mathfrak{S}}(-1)^m q^{3mm+m},$$

ausdrücken.

II. Functionalgleichungen und Periodicität. Das System zweier Zahlen h, g, welche die Indices einer Thetafunction bilden, heisst deren **Charakteristik**. Ist hg gerade, so heisst die Charakteristik gerade, ist das Product ungerade, so heisst die Charakteristik ungerade. Die Thetafunctionen sind mit ihrer Charakteristik gerade und ungerade. Es ist

$$1)\ \vartheta_{h,g}(z) = \overline{\mathfrak{S}}\, e^{\tau\left(\frac{2m+h}{2}\right)^2 + \frac{2m+h}{2}(2z+gi\pi)} = \vartheta(z+\tfrac{1}{2}h\tau+\tfrac{1}{2}gi\pi)\,e^{\frac{1}{4}\tau h^2 + hz + \frac{1}{2}hgi\pi},$$

$$2)\ \vartheta_{2\mu+h,\,2\nu+g}(z) = (-1)^{\nu h}\vartheta_{h,g}(z),\quad \vartheta_{h,g}(-z) = (-1)^{hg}\vartheta_{hg}(z),$$

$$3)\ \vartheta_{h,g}(z+\tfrac{1}{2}h'\tau+\tfrac{1}{2}g'i\pi) = \vartheta_{h+h',\,g+g'}(z)\,e^{-h'z-\frac{1}{4}h'h'\tau-\frac{1}{2}(g+g')h'i\pi}.$$

Für $z = 0$ folgt aus 3), wenn ϑ_{hg} für $\vartheta_{hg}(0)$ gesetzt wird, wobei $\vartheta_{11} = 0$ ist,

$$4)\ \begin{cases} \vartheta(\frac{1}{2}i\pi) = \vartheta_{01}, & \vartheta_{01}(\frac{1}{2}i\pi) = \vartheta, & \vartheta_{10}(\frac{1}{2}i\pi) = 0, & \vartheta_{11}(\frac{1}{2}i\pi) = -\vartheta_{10}, \\ \vartheta(\frac{1}{2}\tau) = e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{10}, & \vartheta_{01}(\frac{1}{2}\tau) = 0, & \vartheta_{10}(\frac{1}{2}\tau) = e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta, & \vartheta_{11}(\frac{1}{2}\tau) = -ie^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{01}, \\ \vartheta(\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}i\pi) = 0, & \vartheta_{01}(\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}i\pi) = e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{10}, & \vartheta_{10}(\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}i\pi) = -ie^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{01}, & \vartheta_{11}(\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}i\pi) = -e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta, \end{cases}$$

$$5)\ \vartheta = \mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})(1+q^{2n+1})^2,\quad \vartheta_{01} = \mathfrak{P}(1-q^{n+1}):(1+q^{n+1}),\quad \vartheta_{10} = 2\sqrt[4]{q}\,\mathfrak{P}(1-q^{4n+4}):(1-q^{4n+2}),$$

$$6)\ \vartheta\vartheta_{01}\vartheta_{10} = 2\sqrt[4]{q}\,\mathfrak{P}(1-q^{2n+2})^3,\quad \vartheta'_{11} = \lim_{z=0}\vartheta_{11}(z):z = i\vartheta\vartheta_{01}\vartheta_{10},$$

$$7)\ \vartheta_{hg}(z+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}\vartheta_{hg}(z),\quad \vartheta_{hg}(z+\mu\tau) = (-1)^{\mu g}e^{-2\mu z-\mu\mu\tau}\vartheta_{hg}(z).$$

Ist $\varphi(z)$ eine ganze transcendente Function, welche die Gleichungen befriedigt

$$8)\ \varphi(z+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}\varphi(z),\quad \varphi(z+\mu\tau) = (-1)^{\mu g}e^{-2\mu pz-\mu\mu\tau p}\varphi(z),$$

so heisst φ eine Thetafunction p^{ter} Ordnung und der Charakteristik h, g und ist in der Form darstellbar

$$9)\ \varphi(z) = \Sigma B_r\overline{\vartheta}(pz+\tfrac{1}{2}(2r+h)\tau+\tfrac{1}{2}gi\pi)\,e^{(2r+h)z},$$

worin die Summe über die Zahlen $r = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ zu erstrecken ist, und $\overline{\vartheta}$ eine Thetafunction mit dem Modul $p\tau$ bedeutet. Die Function $\varphi(z) = \vartheta(z)^\alpha\vartheta_{01}(z)^\beta\vartheta_{10}(z)^\gamma\vartheta_{11}(z)^\delta$ ist eine Thetafunction $\alpha+\beta+\gamma+\delta^{\text{ter}}$ Ordnung und der Charakteristik $\gamma+\delta,\ \beta+\delta$.

III. Die sogenannten Additionstheoreme der Thetafunctionen. Zwischen je $p+1$ Thetafunctionen p^{ter} Ordnung gleicher Charakteristik besteht eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten. Die Thetaquadrate sind Thetafunctionen zweiter Ordnung mit der Charakteristik 0,0. Die Function $\vartheta_{hg}(z+t)\vartheta_{h'g'}(z-t)$ ist eine Thetafunction zweiter Ordnung mit der Charakteristik $h+h', g+g'$. Hieraus erhält man die Gleichungen

1) $\vartheta^2_{10}:\vartheta^2 = k,\ \vartheta^2_{01}:\vartheta^2 = k',\ \vartheta^4 = \vartheta^4_{01}+\vartheta^4_{10},\ k^2+k'^2 = 1,$

2) $k\vartheta^2_{01}(z) = \vartheta^2_{11}(z)+k'\vartheta^2_{10}(z),\ \vartheta^2_{01}(z) = k\vartheta^2_{11}(z)+k'\vartheta^2(z),$

3) $\vartheta\vartheta_{10}\vartheta_{11}(z+t)\vartheta_{01}(z-t) = \vartheta_{10}(t)\vartheta(t)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}(z)+\vartheta_{10}(z)\vartheta(z)\vartheta_{11}(t)\vartheta_{01}(t),$

4) $\vartheta\vartheta_{10}\vartheta_{11}(z-t)\vartheta_{01}(z+t) = \vartheta_{10}(t)\vartheta(t)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}(z)-\vartheta_{10}(z)\vartheta(z)\vartheta_{11}(t)\vartheta_{01}(t),$

5) $\vartheta^2_{01}\vartheta_{01}(z+t)\vartheta_{01}(z-t) = \vartheta^2_{01}(z)\vartheta^2_{01}(t)-\vartheta^2_{11}(z)\vartheta^2_{11}(t),$

6) $\vartheta^2_{01}\vartheta(z+t)\vartheta(z-t) = \vartheta^2(z)\vartheta^2_{01}(t)-\vartheta^2_{10}(z)\vartheta^2_{11}(t) = \vartheta^2(t)\vartheta^2_{01}(z)-\vartheta^2_{10}(t)\vartheta^2_{11}(z),$

7) $\vartheta_{10}\vartheta_{01}\vartheta_{10}(z+t)\vartheta_{01}(z-t) = \vartheta_{10}(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{01}(t)-\vartheta(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta(t)\vartheta_{11}(t),$

8) $\vartheta_{10}\vartheta_{01}\vartheta_{10}(z-t)\vartheta_{01}(z+t) = \vartheta_{10}(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{01}(t)+\vartheta(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta(t)\vartheta_{11}(t),$

9) $\vartheta\vartheta_{01}\vartheta(z+t)\vartheta_{01}(z-t) = \vartheta(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta(t)\vartheta_{01}(t)-\vartheta_{10}(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{11}(t),$

10) $\vartheta\vartheta_{01}\vartheta(z-t)\vartheta_{01}(z+t) = \vartheta(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta(t)\vartheta_{01}(t)+\vartheta_{10}(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{11}(t),$

11) $\vartheta^3_{01}\vartheta_{01}(2z) = \vartheta^4_{01}(z)-\vartheta^4_{11}(z),\ \ \vartheta\vartheta^2_{01}\vartheta(2z) = \vartheta^2(z)\vartheta^2_{01}(z)-\vartheta^2_{10}(z)\vartheta^2_{11}(z),$

12) $\vartheta^2_{01}\vartheta_{10}\vartheta_{10}(2z) = \vartheta^2_{10}(z)\vartheta^2_{01}(z)-\vartheta^2(z)\vartheta^2_{11}(z),\ \ \vartheta^3_{10}\vartheta_{10}(2z) = \vartheta^4(z)-\vartheta^4_{01}(z).$

Ist

$$2w' = w+x+y+z,\ 2x' = w+x-y-z,\ 2y' = w-x+y-z,\ 2z' = w-x-y+z,$$
$$2w = w'+x'+y'+z',\ 2x = w'+x'-y'-z',\ 2y = w'-x'+y'-z',\ 2z = w'-x'-y'+z',$$

so ergeben sich die Formeln, auf welche Jacobi die Theorie der Thetafunctionen stützt, (13.)

$$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)+\vartheta_{10}(w)\vartheta_{10}(x)\vartheta_{10}(y)\vartheta_{10}(z) = \vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z')+\vartheta_{10}(w')\vartheta_{10}(x')\vartheta_{10}(y')\vartheta_{10}(z'),$$
$$\vartheta(w)\vartheta(x)\Theta(y)\vartheta(z)-\vartheta_{10}(w)\vartheta_{10}(x)\vartheta_{10}(y)\vartheta_{10}(z) = \vartheta_{01}(w')\vartheta_{01}(x')\vartheta_{01}(y')\vartheta_{01}(z')+\vartheta_{11}(w')\vartheta_{11}(x')\vartheta_{11}(y')\vartheta_{11}(z').$$

IV. Die Jacobi'schen Bezeichnungen. Wir führen nun die Grössen K, K' ein, wie sie durch Jacobi üblich sind.

1) $z = -u\pi i:2K,\ lg\,q = \tau = -\pi K':K,\ \Theta_{hg}(u) = \vartheta_{hg}(-u\pi i:2K),\ \Theta_{hg} = \vartheta_{hg}.$

2) $\Theta_{hg}(u+2\lambda K) = (-1)^{h\lambda}\,\Theta_{hg}(u),\ \Theta_{hg}(u+2\mu iK') = (-1)^{\mu g}\Theta_{hg}(u)\,e^{\frac{\mu\mu\pi K'}{K}-\frac{\mu ui\pi}{K}},$

3) $\lim\limits_{u=0}\Theta_{11}(u):u = \Theta'_{11},\ \pi\vartheta'_{11} = 2iK\Theta'_{11},\ 2K\Theta'_{11} = \pi\Theta\Theta_{01}\Theta_{10},$

4) $\Theta_{hg}(u+h'iK'+g'K) = \Theta_{h-h',\,g-g'}(u)\,e^{-\frac{h'u\pi i}{2K}+\frac14\frac{h'h'\pi K'}{K}+\frac{i\pi}{2}h'(g-g')},\ \Theta_{h+2\mu,\,g+2\nu}(u) = (-1)^{h\nu}\Theta_{hg}(u),$

4^a) $\Theta_{hg}(u+h'iK'+g'K):\Theta_{h_1g_1}(u+h'iK'+g'K) = e^{\frac{i\pi}{2}h'(g-g_1)}\Theta_{h-h',\,g-g'}(u):\Theta_{h_1-h',\,g_1-g'}(u),$

5) $\begin{cases} \Theta(K) = \Theta_{01}, & \Theta_{01}(K) = \Theta, & \Theta_{10}(K) = 0, & \Theta_{11}(K) = \Theta_{10}, \\ \Theta(iK') = \Theta_{10}:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{01}(iK') = 0, & \Theta_{10}(iK') = \Theta:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{11}(iK') = i\Theta_{01}:\sqrt[4]{q}, \\ \Theta(K+iK') = 0, & \Theta_{01}(K+iK') = \Theta_{10}:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{10}(K+iK') = -i\Theta_{01}:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{11}(K+iK') = \Theta:\sqrt[4]{q}, \end{cases}$

6) $\Theta_{10}:\Theta = \sqrt{k},\ \Theta_{01}:\Theta = \sqrt{k'},\ \Theta^4_{01}+\Theta^4_{10} = \Theta^4.$ Die Vorzeichen der Wurzeln sind durch q und $q^{\frac14}$ bestimmt.

7) $\Theta(u) = 1+2\mathfrak{S}\,q^{mm}\cos(m\pi u:K),$ 8) $\Theta_{01}(u) = 1+2\mathfrak{S}(-1)^m q^{mm}\cos(m\pi u:K),$

9) $\Theta_{10}(u) = 2q^{\frac14}\mathfrak{S}\,q^{m(m-1)}\cos((2m-1)\pi u:2K),$ 10) $\Theta_{11}(u) = 2q^{\frac14}\mathfrak{S}\,q^{m(m-1)}(-1)^{m-1}\sin((2m-1)\pi u:K),$

11) $sa\,u = \Theta_{11}(u):\sqrt{k}\,\Theta_{01}(u),\ ca\,u = \sqrt{k'}\Theta_{10}(u):\sqrt{k}\,\Theta_{01}(u),\ da\,u = \sqrt{k'}\Theta(u):\Theta_{01}(u).$

Diese neuen Functionen hängen zunächst von drei Grössen, u, K, K', ab, von denen in der Bezeichnung nur die erste angedeutet ist; es wird aber die Bedeutung der Bezeichnung nachher so beschränkt werden, dass sie (die elliptischen Functionen) ausser von u nur noch von $K':K$ abhängen. Auch ohne diese Beschränkung hat man

12) $sa-u = -sa\,u,\ ca-u = ca\,u,\ da-u = da\,u,\ sa\,0 = 0,\ ca\,0 = 1,\ da\,0 = 1,$

13) $sa^2u+ca^2u = 1,\ k^2sa^2u+da^2u = 1,\ da^2u-k^2ca^2u = k'^2,\ sa\,iK' = ca\,iK' = da\,iK' = \infty,$

14) $sa K = 1,\; ca K = 0,\; da K = k',\; sa(K+iK') = 1:k,\; ca(K+iK') = -ik':k,\; da(K+iK') = 0,$

15) $sa\, iK' : ca\, iK' : da\, iK' = i:1:k.$

Jacobi bedient sich zur Unterscheidung der Thetafunctionen mit verschiedenen Charakteristiken nur eines Index, während hier mit Hermite Doppelindices angewandt sind. Zwischen beiden Bezeichnungen bestehen die Beziehungen

16) $\Theta(u) = \vartheta_3\left(\frac{u\pi}{2K}\right),\; \Theta_{01}(u) = \vartheta\left(\frac{u\pi}{2K}\right),\; \Theta_{10}(u) = \vartheta_2\left(\frac{u\pi}{2K}\right),\; \Theta_{11}(u) = \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{2K}\right).$

V. Periodicität. Die elliptischen Functionen sind doppeltperiodische Functionen. Aus der Periodicität der Thetafunctionen leitet man ohne Mühe die Beziehungen ab:

1) $sa^2 u+2K = sa^2 u+2iK' = sa^2 u,\quad ca^2 u+2K = ca^2 u+2iK' = ca^2 u,\quad da^2 u+2K = da^2 u+2iK' = da^2 u,$

2) $sa u+4K = sa u+2iK' = sa u,\quad ca u+4K = ca u+2K+2iK' = ca u,\quad da u+2K = da u+4iK' = da u,$

3) $sa u \pm 4\nu K \pm 2\mu i K' = sa u,\quad ca u \pm 4\nu K' \pm \mu(2K+2iK') = ca u,\quad da u \pm 2\nu K \pm 4\mu i K' = da u,$

4) $sa -u = -sa u,\quad ca -u = ca u,\quad da -u = da u,$

5) $sa u - K = -ca u : da u,\quad ca u - K = k' sa u : da u,\quad da u - K = da K - u = k' : da u$

6) $sa u + K = sa K - u = ca u : da u,\quad ca u + K = -ca K - u = -k' sa u : da u,\quad da u + K = k' : da u,$

7) $sa u \pm 2K = -sa u,\quad ca u \pm 2K = -ca u,\quad da u \pm 2K = da u,$

8) $sa 2K - u = sa u,\quad ca 2K - u = -ca u,\quad da 2K - u = da u,$

9) $sa u \pm iK' = 1 : k sa u,\quad ca u \pm iK' = \pm da u : ik sa u,\quad da u \pm iK' = \pm ca u : i sa u,$

10) $sa u \pm 2iK' = sa u,\quad ca u \pm 2iK' = -ca u,\quad da u \pm 2iK' = -da u,$

11) $sa u + K + iK' = da u : k ca u,\quad ca u + K + iK' = k' : ik ca u,\quad da u + K + iK' = ik' sa u : ca u.$

Die Grössen iK' und K stehen in einem complexen Verhältnisse zu einander, wenn die Thetafunctionen convergiren, daher stehen auch die Perioden der hier definirten doppeltperiodischen Functionen, z. B. die Perioden $2K$, $2iK'$ der Quadrate von sa, ca, da, in einem complexen Verhältnisse zu einander. Construirt man in der die complexen Zahlen u darstellenden Ebene ein Parallelogramm mit den Ecken u_0, u_0+2K, $u_0+2K+2iK'$, u_0+2iK', so nennt man dasselbe ein Periodenparallelogramm. Es hat einen von Null verschiedenen Flächeninhalt, gleich $abs\, 2K \,.\, abs\, 2iK' \,.\, sin\, arc(2iK' : 2K)$. Durch congruente Wiederholung des Parallelogrammes bedeckt man die ganze u-Ebene mit congruenten Parallelogrammen. Eine doppeltperiodische Function ist vollständig bekannt, wenn man sie in einem Periodenparallelogramm kennt. Zahlen, deren Differenz eine Summe von Multiplis der beiden Perioden ist, heissen congruent; ihre Träger in der u-Ebene werden zur Deckung gebracht, wenn man die Periodenparallelogramme zur Deckung bringt, in denen sie sich befinden.

Für $q = 0$ ist

$$\Theta(u) = 1,\; \Theta_{01}(u) = 1,\; \Theta_{10}(u) : \sqrt[4]{q} = 2\cos(\pi u : 2K),\; \Theta_{11}(u) : \sqrt[4]{q} = 2\sin(\pi u : 2K),$$

$$\Theta_{10} : \Theta \sqrt[4]{q} = \sqrt{k} : \sqrt[4]{q} = 2,\; \Theta_{01} : \Theta = \sqrt{k'} = 1,\; sa u = \sin(\pi u : 2K),\; ca u = \cos(\pi u : 2K),\; da u = 1.$$

Tritt die engere Bestimmung hinzu $\lim sa u : u = sa' 0 = 1$, so folgt noch $2K = \pi$.

VI. Additionstheoreme. Diese werden aus den Formeln unter III. durch Division erhalten. Wird zur Abkürzung $N = 1 - k^2 sa^2 u\, sa^2 v$ gesetzt, so hat man

$sa(u \pm v) = (sa u\, ca v\, da v \pm sa v\, ca u\, da u) : N,\qquad sa(u+v)\, sa(u-v) = (sa^2 u - sa^2 v) : N,$

$sa(u+v) + sa(u-v) = 2 sa u\, ca v\, da v : N,\qquad sa(u+v) - sa(u-v) = 2 ca u\, da u\, sa v : N,$

$ca(u \pm v) = (ca u\, ca v \mp sa u\, sa v\, da u\, da v) : N,\qquad ca(u+v) + ca(u-v) = 2 ca u\, ca v : N,$

$ca(u+v) - ca(u-v) = -2 sa u\, sa v\, da u\, da v : N,\qquad 1 + ca(u+v)\, ca(u-v) = (ca^2 u + ca^2 v) : N,$

$da(u \pm v) = (da u\, da v \mp k^2 sa u\, sa v\, ca u\, ca v) : N,\qquad da(u+v) + da(u-v) = 2 da u\, da v : N,$

$da(u+v) - da(u-v) = -2k^2 sa u\, sa v\, ca u\, ca v : N,\qquad 1 + da(u+v)\, da(u-v) = (da^2 u + da^2 v) : N,$

$ca(u \pm v) = ca u\, ca v \mp sa u\, sa v\, da(u \pm v),\qquad sa 2u = 2 sa u\, ca u\, da u : (1 - k^2 sa^4 u),$

$ca 2u = (ca^2 u - sa^2 u\, da^2 u) : (1 - k^2 sa^4 u) = ca^2 u - sa^2 u\, da 2u,\quad da 2u = (da^2 u - k^2 sa^2 u\, ca^2 u) : (1 - k^2 sa^4 u),$

$sa^2 u = (1 - ca 2u) : (1 + da 2u),\quad ca^2 u = (ca 2u + da 2u) : (1 + da 2u),$

$sa 3u = sa u (3 - 4(1+k^2) sa^2 u + 6k^2 sa^4 u - k^4 sa^8 u) : (1 - 6k^2 sa^4 u + 4k^2(1+k^2) sa^6 u - 3k^4 sa^8 u).$

$sa\tfrac{1}{2}K = 1:\sqrt{1+k'}$, $ca\tfrac{1}{2}K = \sqrt{k':(1+k')}$, $da\tfrac{1}{2}K = \sqrt{k'}$, $sa\tfrac{1}{2}iK' = i:\sqrt{k}$, $ca\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{(1+k):k}$, $da\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{1+k}$,

$saK+\tfrac{1}{2}iK' = 1:\sqrt{k}$, $caK+\tfrac{1}{2}iK' = -i\sqrt{(1-k):k}$, $da\,K+\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{1-k}$,

$sa\tfrac{1}{2}K+\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{(k+ik'):k}$, $ca\tfrac{1}{2}K+\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{-ik':k}$, $da\tfrac{1}{2}K+\tfrac{1}{2}iK' = -\sqrt{k'(k'-ik)}$,

$sa\tfrac{1}{2}K+\tfrac{3}{2}iK' = \sqrt{(k-ik'):k}$, $ca\tfrac{1}{2}K+\tfrac{3}{2}iK' = \sqrt{ik':k}$, $da\tfrac{1}{2}K+\tfrac{3}{2}iK' = \sqrt{(k'+ik)k'}$,

$sa\tfrac{3}{2}K = 1:\sqrt{1+k'}$, $ca\tfrac{3}{2}K = -\sqrt{k':(1+k')}$, $da\tfrac{3}{2}K = \sqrt{k'}$,

$sa\tfrac{3}{2}K+\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{(k-ik'):k}$, $ca\tfrac{3}{2}K+\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{ik':k}$, $da\tfrac{3}{2}K+\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{(k'+ik)k'}$,

$sa\tfrac{3}{2}K+\tfrac{3}{2}iK' = \sqrt{(k+ik'):k}$, $ca\tfrac{3}{2}K+\tfrac{3}{2}iK' = \sqrt{k':ik}$, $da\tfrac{3}{2}K+\tfrac{3}{2}iK' = \sqrt{k'k'-ikk'}$,

$sa\,iK'+\tfrac{1}{2}K = \sqrt{1+k':k}$, $ca\,iK'+\tfrac{1}{2}K = -i\sqrt{k':(1-k')}$, $da\,iK'+\tfrac{1}{2}K = -i\sqrt{k'}$,

$sa\,iK'-\tfrac{1}{2}K = -\sqrt{1+k':k}$, $ca\,iK'-\tfrac{1}{2}K = i\sqrt{k':(1-k')}$, $da\,iK'-\tfrac{1}{2}K = i\sqrt{k'}$,

$$k^4 sa^8\frac{2K}{3} - 6k^2 sa^4\frac{2K}{3} + 4(1+k^2)sa^2\frac{2K}{3} - 3 = 0,\quad tga\,u = sa\,u : ca\,u.$$

VII. Formeln zur numerischen Berechnung. Zwischen K und K' wird eine Beziehung dadurch hergestellt, dass $sa'0 = lim\,sa\,u : u = 1$ (für $u = 0$) angenommen wird, und man hat dann

1) $\sqrt{\dfrac{2K}{\pi}} = \Theta = 1+2\mathfrak{S}q^{mm}$, $\sqrt{\dfrac{2Kk'}{\pi}} = \Theta_{01}$, $\sqrt{\dfrac{2Kk}{\pi}} = \Theta_{10}$, $\sqrt{\dfrac{2Kkk'}{\pi}} = \Theta'_{11}$.

2) $sa'u = ca\,u\,da\,u = \sqrt{(1-sa^2u)(1-k^2sa^2u)}$, $ca'u = -da\,u\,sa\,u$, $da'u = -k^2 sa\,u\,ca\,u$.

3) Wird $\sqrt{k'} = cos\,\beta$ gesetzt, so ist $q = e^{-\pi K':K} =$

$$\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} + \frac{2}{2^5}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^5 + \frac{15}{2^9}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^9 + \frac{150}{2^{13}}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^{13} + \frac{1707}{2^{17}}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^{17} + \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2}tg^2\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{16}tg^{10}\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{15}{512}tg^{18}\tfrac{1}{2}\beta + \ldots.$$

4) $q' = e^{-\pi K':K} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} + \dfrac{2}{2^5}\left(\dfrac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^5 + \dfrac{15}{2^9}\left(\dfrac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^9 + \ldots$, $lg\,q\,.\,lg\,q' = \pi\pi$.

5) $K = \tfrac{1}{2}\pi(1+2\mathfrak{S}q^{mm})^2 = \tfrac{1}{2}\pi\mathfrak{P}(1+q^{2n+1})^4(1-q^{2n+2})^2$, $\pi K' = -K\,lg\,q$,

$$K = \frac{\pi}{2\sqrt{k'}}\left(1 - \frac{4q^2}{1+q^2} + \frac{4q^6}{1+q^4} - \frac{4q^{12}}{1+q^6} + \frac{4q^{20}}{1+q^8} - + \ldots\right),\quad \sqrt{k'} = \mathfrak{P}(1-q^{2n+1}):(1+q^{2n+1}).$$

Ist $da\,u = cos\,\omega$, so ist näherungsweise

6) $cos\dfrac{u\pi}{K} = \dfrac{1}{2q}tg\tfrac{1}{2}(\beta+\omega)\,tg\tfrac{1}{2}(\beta-\omega)\left(1-2q^4+q^2tg^2\tfrac{1}{2}(\beta+\omega)\,tg^2\tfrac{1}{2}(\beta-\omega)\right)$.

7) $(sa^2u)' = 2\sqrt{sa^2u\,.\,1-sa^2u\,.\,1-k^2sa^2u}$, $tga'u = \sqrt{(1+tga^2u)(1+k'^2tga^2u)}$.

Das Pendel. Bedeutet v die Geschwindigkeit eines mathematischen Pendels von der Länge 1, x die Erhebung über die tiefste Stelle zur Zeit t, h die Maximalerhebung, φ die Neigung gegen die Vertikale, α die Maximalneigung, x' die in der Richtung der Vertikalen gemessene Geschwindigkeit, φ' die Winkelgeschwindigkeit, T die Schwingungsdauer, so ist (zum Theil näherungsweise)

$v^2 = 2g(h-x)$, $v^2 = x'x':x(2-x)$, $x' = \sqrt{2g\,.\,x\,.\,h-x\,.\,2-x}$, $x = h\,sa^2\sqrt{g}\,t$,

$k = sin\tfrac{1}{2}\alpha$, $k' = cos\tfrac{1}{2}\alpha = cos^2\beta$, $1-cos\,\alpha = 2sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$, $\psi = 2\varphi$, $q = \tfrac{1}{2}tg^2\tfrac{1}{2}\beta$,

$x = 1-cos\,\varphi = 2sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$, $sin\tfrac{1}{2}\varphi = k\,sa\sqrt{g}\,t$, $cos\tfrac{1}{2}\varphi = da\sqrt{g}\,t$, $\varphi' = 2\sqrt{g}\sqrt{sin\dfrac{\alpha+\varphi}{2}\,sin\dfrac{\alpha-\varphi}{2}}$,

$K = \pi:2cos^4\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\pi(1+2q)^2$, $T = 2K:\sqrt{g} = \pi:\sqrt{g}\,cos^4\tfrac{1}{2}\beta$,

$$cos\,2\sqrt{g}\,t\,cos^4\tfrac{1}{2}\beta) = cotg^2\tfrac{1}{2}\beta\,tg\tfrac{1}{2}(\beta+\psi)\,tg\tfrac{1}{2}(\beta-\psi).$$

VIII. Darstellungen elliptischer Functionen durch Partialbrüche und trigonometrische Reihen.

1) $sa\,u = \dfrac{2\pi\sqrt{q}}{kK}\,sin\dfrac{u\pi}{2K}\,\mathfrak{S}\dfrac{q^{m-1}(1+q^{2m-1})}{1-2q^{2m-1}cos(u\pi:K)+q^{4m-2}} = \dfrac{2\pi\sqrt{q}}{kK}\,\mathfrak{S}\dfrac{q^{m-1}sin((2m-1)\pi u:2K)}{1-q^{2m-1}}$,

$$2)\ ca\,u = \frac{2\pi\sqrt{q}}{kK}\cos\frac{u\pi}{2K}\,\mathfrak{S}\,\frac{(-q)^{m-1}(1-q^{2m-1})}{1-2q^{2m-1}\cos(u\pi:K)+q^{4m-2}} = \frac{2\pi\sqrt{q}}{kK}\,\mathfrak{S}\,\frac{q^{m-1}\cos((2m-1)\pi u:2K)}{1+q^{2m-1}}.$$

$$3)\ da\,u = \frac{\pi}{2K}\left(1+4\,\mathfrak{S}\,\frac{q^m\cos(m\pi u:K)}{1+q^{2m}}\right),\quad lg\,sa\,u = lg\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin\frac{u\pi}{2K}\right)+2\,\mathfrak{S}\,\frac{q^m\cos(m\pi u:K)}{m(1+q^m)}.$$

$$4)\ lg\,ca\,u = lg\left(\frac{2\sqrt[4]{q}\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\cos\frac{u\pi}{2K}\right)+2\,\mathfrak{S}\,\frac{q^m\cos(m\pi u:K)}{m(1+(-q)^m)},\quad lg\,da\,u = lg\sqrt{k'}+4\,\mathfrak{S}\,\frac{q^{2m-1}\cos((2m-1)\pi u:K)}{(2m-1)(1-q^{4m-2})}.$$

$$5)\ lg\frac{1+sa\,u}{1-sa\,u} = lg\frac{1+\sin(u\pi:2K)}{1-\sin(u\pi:2K)}+8\,\mathfrak{S}\,\frac{(-1)^{m-1}q^{2m-1}\sin((2m-1)u\pi:2K)}{(2m-1)(1-q^{2m-1})},$$

$$lg\frac{1+k\,sa\,u}{1-k\,sa\,u} = 8\sqrt{q}\,\mathfrak{S}\,\frac{(-1)^{m-1}q^{m-1}\sin((2m-1)\pi u:2K)}{(2m-1)(1-q^{2m-1})}.$$

$$6)\ sa^2u = (4\pi^2:k^2K)\,\mathfrak{S}\,m q^m\sin^2(m\pi u:2K):(1-q^m),\quad lg\,k = lg\,4\sqrt{q}+4\,\mathfrak{S}(-1)^m q^m:m(1+q^m).$$

$$7)\ 4K^2:\pi^2 = 1+8\,\mathfrak{S}\,m q^m:(1+(-q)^m) = \vartheta^4 = (1+2\,\mathfrak{S}\,q^{m^2})^4,\quad 2K:\pi = 1+4\,\mathfrak{S}\,q^m:(1+q^{2m}).$$

IX. Die wichtigsten Liouville'schen Sätze. Das Verhältniss der Perioden einer eindeutigen doppelt periodischen Function kann nicht reell sein. Eine doppelt periodische Function muss in einem Periodenparallelogramm mindestens zweimal unendlich gross werden. Wird sie n-mal unendlich gross, so sagt man, sie sei von der n^{ten} Ordnung. Die Summe der ersten Residuen einer doppelt periodischen Function in einem Periodenparallelogramm ist Null. Eine doppelt periodische Function n^{ter} Ordnung lässt sich durch eine eben solche zweiter Ordnung und deren Ableitung rational darstellen. Eine doppelt periodische Function nimmt in einem Periodenparallelogramm jeden Werth gleich oft an. Sind die Werthe, für welche eine solche Function im Periodenparallelogramm gleich a wird, $u_a, u_a', u_a'', \ldots$, die, für welche sie gleich b wird, $u_b, u_b', u_b'', \ldots$, so ist

$$u_a+u_a'+u_a''+\ldots \equiv u_b+u_b'+u_b''+\ldots.$$

Primitive oder Elementarperioden heissen ein Paar solcher Perioden, durch welche sich jede andere Periode linear mit ganzzahligen Coefficienten darstellen lässt. Ein Paar primitiver Perioden kann auf unendlich viele Arten gebildet werden, das aus ihnen gebildete Parallelogramm hat stets denselben Flächeninhalt. Zwischen einer doppelt periodischen Function und ihrer Ableitung besteht eine algebraische Gleichung.

X. Die lineare Transformation der Thetafunctionen und der Function sa^2u. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen, welche die Bedingung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ befriedigen, so besteht nach § 67 die Gleichung

$$1)\ \vartheta(z,\tau) = \pm\sqrt{\frac{-\pi}{\gamma\tau+\delta i\pi}}\,e^{\frac{-z^2\gamma}{\gamma\tau+\delta i\pi}-\frac14 i\pi(\alpha\delta+\psi)}\,\vartheta_{\gamma\delta,\alpha\beta}\left(\frac{i\pi z}{\gamma\tau+\delta i\pi}\,.\,i\pi\frac{\alpha\tau+\beta i\pi}{\gamma\tau+\delta i\pi}\right),$$

worin ψ eine auf Seite 77 definirte ganze Zahl ist, das Vorzeichen aber in etwas complicirter Weise von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ abhängt. In der speciellen, aber wichtigen Formel

$$2)\ \vartheta_{hg}(z,\tau) = \sqrt{-\pi:\tau}\,e^{-z^2:\tau+\frac14 hgi\pi}\,\vartheta_{gh}(i\pi z:\tau,\ \pi^2:\tau)$$

ist der reelle Theil der Wurzel positiv zu nehmen. Hieraus lassen sich die linearen Transformationsformeln für sa^2u herleiten. Sie sind:

$$3)\ \left\{\begin{aligned} &k^2sa^2(u,k) = sa^2(uk,1:k),\quad -sa^2(u,k) = sa^2(ui,k'):ca^2(ui,k') = tga^2(ui,k'),\\ &-k'^2 sa^2(u,k) = \frac{sa^2\left(iuk',\frac{1}{k'}\right)}{da^2\left(iuk',\frac{1}{k'}\right)},\quad k^2sa^2(u,k) = \frac{sa^2\left(iuk,\frac{ik'}{k}\right)}{ca^2\left(iuk,\frac{ik'}{k}\right)},\quad k^2sa^2(u,k) = \frac{sa^2\left(uk',\frac{ik}{k'}\right)}{da^2\left(uk',\frac{ik}{k'}\right)}.\end{aligned}\right.$$

$$4)\ ca(iu,k) = 1:ca(u,k'),\quad da(iu,k) = da(u,k'):ca(u,k'),\quad da(u,k) = ca(uk,1:k).$$

XI. Einige andere Transformationen.

$$1)\ sa((1+k)u,\mathfrak{k}) = \frac{(1+k)sa\,u}{1+k\,sa^2u},\quad ca((1+k)u,\mathfrak{k}) = \frac{ca\,u\,da\,u}{1+k\,sa^2u}.$$

$$tga((1+k)u,\mathfrak{k}) = \frac{(1+k)\,sa\,u}{sa\,u\,da\,u}, \quad \mathfrak{k} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad (1+k)(1+\mathfrak{k}') = 2, \quad k = \frac{1-\mathfrak{k}'}{1+\mathfrak{k}'}.$$

2) $$sa(u,k) = 2\,sa\left(\frac{(1+k')u}{2}, \frac{1-k'}{1+k'}\right) : \left[(1+k') + (1-k')\,sa^2\left(\frac{(1+k')u}{2}, \frac{1-k'}{1+k'}\right)\right].$$

3) $$sa^2\left[\frac{(1+\sqrt{k'})^2 u}{2}, \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2\right] = \left(\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\right)^2 \frac{1-da\,u}{1+da\,u}\,\frac{da\,u-k'}{da\,u+k'}.$$

4) $$sa\,u + K + \tfrac{1}{2}iK' = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{1+\sqrt{k}-(1-\sqrt{k})\,sa(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k})}{1+\sqrt{k}+(1-\sqrt{k})\,sa(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k})}. \quad \mathfrak{k} = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2.$$

Vergleicht man hier Reelles mit Reellem, Imaginäres mit Imaginärem, so folgt:

5) $$\frac{2\,sa(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k})}{1-\mathfrak{k}\,sa^2(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k})} = \frac{i(1-k)\,sa\,u}{1-k\,sa^2u}.$$ 6) $$\frac{ca\,u\,da\,u}{1-k\,sa^2u} = \frac{1+\mathfrak{k}\,sa^2(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k})}{1-\mathfrak{k}\,sa^2(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k})} = \cos\psi,$$

$$sa(\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k}) = \frac{i(1+\sqrt{k})^2\,sa\,u}{1+ca\,u\,da\,u-k\,sa^2u}.$$

$$ca^2(\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k}) = 1+(1:\mathfrak{k})\,tg^2\tfrac{1}{2}\psi, \quad da^2(\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k}) = 1+\mathfrak{k}\,tg^2\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$sa^2(\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k}) = -(1:\mathfrak{k})\,tg^2\tfrac{1}{2}\psi.$$ (Vergl. § 75.)

Obgleich durch diese Transformation ein imaginäres Argument eingeführt wird, so kann sie doch von sehr grossem Nutzen sein. Ist nämlich $k > \sqrt{\frac{1}{2}}$, so ist

$$\mathfrak{k} < (\sqrt[4]{2}-1)^2 : (\sqrt[4]{2}+1)^2, \quad q < 0{,}000\,007, \quad q^2 < 0{,}000\,000\,000\,05,$$

so dass beim Rechnen mit zehnstelligen Logarithmentafeln q^2 schon vernachlässigt werden kann.

XII. Einige Differentiale.

1) $d\,sa\,u = \sqrt{(1-sa^2u)(1-k^2sa^2u)}\,du, \quad d\,sa^2u = 2\sqrt{sa^2u(1-sa^2u)(1-k^2sa^2u)}\,du,$

2) $d\,ca\,u = -k'\sqrt{(1-ca^2u)(1+\frac{k^2}{k'^2}ca^2u)}\,du, \quad d\frac{1}{ca\,u} = k\sqrt{\left(\frac{1}{ca^2u}-1\right)\left(1+\frac{k'^2}{k^2ca^2u}\right)}\,du.$

3) $d\,da\,u = -k'\sqrt{(da^2u-1)(1-(1:k'^2)\,da^2u)}, \quad d\,tga\,u = \sqrt{(1+tga^2u)(1+k'^2\,tga^2u)}\,du.$

4) $k\,ca\,u\,du = d\,arc\sin(k\,sa\,u) = -d\,arc\sin(da\,u) = d\,arc\,tg(k\,sa\,u : da\,u).$

5) $k\,sa\,u\,du = d\,lg(da\,u - k\,ca\,u) = \frac{1}{2}d\,lg[(da\,u-k\,ca\,u):(da\,u+k\,ca\,u)].$

6) $k'\,tga\,u\,du = \frac{1}{2}d\,lg((da\,u+k'):(da\,u-k')).$

7) $\frac{du}{sa\,u} = \frac{1}{2}d\,lg\frac{ca\,u-da\,u}{ca\,u+da\,u}, \quad \frac{k'du}{ca\,u} = d\,lg\frac{k'sa\,u+da\,u}{ca\,u}.$

8) $da\,u\,du = d(am\,u) = d\,arc\sin(sa\,u), \quad k'du : da\,u = d\,arc\,tg(k'\,tga\,u).$

XIII. Das Integral erster Gattung. Es sei $s = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$, $k^2+k'^2 = 1$, $\Delta(\varphi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, $u(s,z) = u(s,z;k) = \int(1:s)\,dz$, $u(1,0) = 0$, $z = \sin\varphi$, $F(\varphi) = F(\varphi,k) = \int(1:\Delta(\varphi))\,d\varphi$, $F(0) = 0$, $\varphi = am\,u$. So ist

1) $u(0,1) = K = F(\frac{1}{2}\pi,k) = F, \quad u(0,1:k) = K+iK', \quad u(0,1:k)-u(0,1) = iK' = iF(\frac{1}{2}\pi,k') = iF',$

2) $u(s_1,z_1)+u(s_2,z_2) \equiv u(s,z), \quad z = (z_1s_2+z_2s_1):(1-k^2z_1^2z_1^2).$ Vergl. § 106.

3) $F(\varphi_1)+F(\varphi_2) = F(\varphi), \quad \sin\varphi = (\sin\varphi_1\cos\varphi_2\,\Delta\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1\,\Delta\varphi_1):(1-k^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2).$

4) $u(\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},z) = u(\sqrt{(1-z^2)(1-z^2:k^2)},zk):k, \quad u(s,z)+u(-s,z) \equiv 2K\ (4K, 2iK').$

5) $F(\frac{1}{2}m\pi+\varphi,k) = mK+F(\varphi,k), \quad F(\frac{1}{2}m\pi+\varphi,k') = mK'+F(\varphi,k'), \quad F(\varphi,i) = \sin\varphi\,F(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4},\sin^4\varphi).$

6) $K = \frac{1}{2}\pi F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2), \quad K' = \frac{1}{2}\pi F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k'^2), \quad F(\frac{1}{2}\pi,i) = K(i) = (\sqrt{8}\,fac^2(\frac{1}{4})):\sqrt{\pi},$

7) $F(\frac{1}{2}\pi,1:k) = k(F(\frac{1}{2}\pi,k)-iF(\frac{1}{2}\pi,k')), \quad K'(1:k) = kK'(k), \quad F(\frac{1}{2}\pi,\sqrt{2}) = (1+i)F(\frac{1}{2}\pi,i).$

XIV. Elliptische Integrale zweiter Gattung.

1) $E(\varphi,k)=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int\limits_0^{z}\sqrt{\frac{1-z^2k^2}{1-z^2}}\,dz,\quad \int\limits_1^{(1:k)}\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz=i(K'-E')$.

2) $E=E(\frac{1}{2}\pi,k),\quad E'=E(\frac{1}{2}\pi,k'),\quad EK'+KE'-KK'=\frac{1}{2}\pi$.

3) $E=\frac{1}{2}\pi F(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,k^2),\quad E'=\frac{1}{2}\pi F(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,k'^2)$.

4) $\frac{E}{K}=-\frac{\Theta''_{10}}{\Theta_{10}}=\frac{\pi^2}{4K^2}\,\frac{1+9q^2+25q^6+49q^{12}+\dots}{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\dots}=\frac{\pi^2}{4K^2}\left(1+8\,\mathfrak{S}(-1)^{m+1}\frac{mq^m}{1-q^{2m}}\right)$,

5) $\frac{E-K}{K}=-\frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}}=\frac{2\pi^2}{K^2}\cdot\frac{-q+4q^4-9q^9+16q^{16}-.+\dots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-.+\dots}=-\frac{2\pi^2}{K^2}\,\mathfrak{S}\,\frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}}$.

6) $\int\limits_0^K sa^2u\,du=\int\limits_0^1\frac{z^2dz}{s}=\frac{K\Theta''_{01}(0)}{k^2\Theta_{01}(0)},\quad K\int\limits_K^{K+iK'}k^2sa^2du-iK'\int\limits_0^K k^2sa^2du=\frac{1}{2}i\pi$.

7) $k^2\int sa^2u\,du-\int\frac{du}{sa^2u}=\frac{ca\,u\,da\,u}{sa\,u}=\frac{d\,lg\,sa\,u}{du}$.

$d\,sa^m u:du=m\,sa^{m-1}u\,ca\,u\,da\,u$

$=m(m-1)\int sa^{m-2}u\,du-m^2(1+k^2)\int sa^m u\,du+m(m+1)k^2\int sa^{m+2}u\,du$.

$\int\limits_0^u k^2ca^2u\,du+\int\limits_0^u\frac{k'^2du}{ca^2u}=\frac{sa\,u\,da\,u}{ca\,u}=-\frac{d\,lg\,ca\,u}{du}$.

$\int\limits_0^u k'^2da^2u\,du-\int\limits_0^u\frac{du}{da^2u}=-\frac{k^2sa\,u\,ca\,u}{da\,u}=\frac{d\,lg\,da\,u}{du}$.

XV. Die logarithmischen Differentialquotienten der Theta-Functionen oder die Zeta-Functionen.

1) $Z_{00}(u)=\frac{\partial\,lg\,\Theta(u)}{\partial u}=\frac{K-E}{K}u-\int\limits_0^u\frac{k^2ca^2u}{da^2u}du=-\frac{E}{K}u+\int\limits_0^u\frac{k'^2du}{da^2u}=\frac{2\pi}{K}\,\mathfrak{S}(-1)^m\frac{q^m\sin(m\pi u:K)}{1-q^{2m}}$

$=-\frac{2\pi}{K}\,\frac{q\sin\frac{u\pi}{K}+2q^4\sin\frac{2u\pi}{K}+3q^9\sin\frac{3u\pi}{K}+\dots}{1+2q\cos\frac{u\pi}{K}+2q^4\cos\frac{2u\pi}{K}+2q^9\cos\frac{3u\pi}{K}+\dots}$.

2) $Z_{01}(u)=(Z(u)$ bei Jacobi$)=\frac{\partial\,lg\,\Theta_{01}(u)}{\partial u}=-\frac{E}{K}u+\int\limits_0^u da^2u\,du=\frac{K-E}{K}u-k^2\int\limits_0^u sa^2u\,du$

$=\frac{KE(\varphi)-EF(\varphi)}{K}=\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q\sin(\pi u:K)}{1-q^2}+\frac{q^2\sin(2\pi u:K)}{1-q^4}+\frac{q^3\sin(3\pi u:K)}{1-q^6}+\dots\right)$.

3) $Z_{10}(u)=\frac{\partial\,lg\,\Theta_{10}(u)}{\partial u}=\frac{u\Theta''_{01}(0)}{\Theta_{01}(0)}-\int\limits_0^u\frac{da^2u\,du}{ca^2u}=\frac{u\Theta''_{00}(0)}{\Theta_{00}(0)}-\int\limits_0^u\frac{k'^2du}{ca^2u}$

$=\frac{-\pi}{2K}tg\frac{\pi u}{2K}+\frac{2\pi}{K}\,\mathfrak{S}\,\frac{(-1)^mq^{2m}\sin(m\pi u:K)}{1-q^{2m}}$

$=\frac{2\pi}{2K}\,\frac{\sin\frac{\pi u}{2K}+3q^2\sin\frac{3\pi u}{2K}+5q^6\sin\frac{5\pi u}{2K}+7q^{12}\sin\frac{7\pi u}{2K}+\dots}{\cos\frac{\pi u}{2K}+q^2\cos\frac{3\pi u}{2K}+q^6\cos\frac{5\pi u}{2K}+q^{12}\cos\frac{7\pi u}{2K}+\dots}$.

4) $Z_{11}(u)=\frac{\partial\,lg\,\Theta_{11}(u)}{\partial u}=\frac{\Theta''_{01}(0)}{\Theta_{01}(0)}(u-K)-\int\limits_K^u\frac{du}{sa^2u}=\frac{K-E}{K}(u-K)-\int\limits_K^u\frac{du}{sa^2u}$

$=\frac{2K}{\pi}cotg\frac{\pi u}{2K}+\frac{2\pi}{K}\,\mathfrak{S}\,\frac{q^{2m}\sin\frac{m\pi u}{K}}{1-q^{2m}}=\frac{\pi}{2K}\,\frac{\cos\frac{\pi u}{2K}-3q^2\cos\frac{3\pi u}{2K}+5q^6\cos\frac{5\pi u}{2K}-+\dots}{\sin\frac{\pi u}{2K}-q^2\sin\frac{3\pi u}{2K}+q^6\sin\frac{5\pi u}{2K}-+\dots}$.

5) $E=\sqrt{k'}(1+k'-\sqrt{k'})K$ (Jacobi's Näherungsformel für kleine k).

XVI. Periodicität und Werthe für specielle Argumente.

1) $Z_{00}(u+2K)=Z_{00}(u),\ \ Z_{00}(u+2iK')=Z_{00}(u)-(i\pi:K),\ \ Z_{00}(-u)=-Z_{00}(u).$

2) $Z_{01}(u+2K)=Z_{01}(u),\ \ Z_{01}(u+2iK')=Z_{01}(u)-(i\pi:K),\ \ Z_{01}(-u)=-Z_{01}(u).$

3) $Z_{10}(u+2K)=Z_{10}(u),\ \ Z_{10}(u+2iK')=Z_{10}(u)-(i\pi:K),\ \ Z_{10}(-u)=-Z_{10}(u).$

4) $Z_{11}(u+2K)=Z_{11}(u),\ \ Z_{11}(u+2iK')=Z_{11}(u)-(i\pi:K),\ \ Z_{11}(-u)=-Z_{11}(u).$

5) $Z_{00}(mK)=Z_{01}(mK)=Z_{11}(K)=Z_{10}(0)=0,$

$Z_{00}(K+iK')=\infty,\ \ Z_{01}(iK')=\infty,\ \ Z_{10}(K)=\infty,\ \ Z_{11}(0)=\infty,$

$Z_{00}(iK')=Z_{01}(K+iK')=Z_{10}(iK')=Z_{10}(K+iK')=Z_{11}(iK')=Z_{11}(K+iK')=-(i\pi:2K).$

$Z_{01}(\tfrac{1}{2}K)=\tfrac{1}{2}(1-k'),\ \ Z_{01}(\tfrac{1}{2}iK')=-(i\pi:4K)+\tfrac{1}{2}(k+ik')-\tfrac{1}{2}(1-k')+i(k\sqrt{(k+ik')}:\sqrt{1+k'}).$

6) $Z_{11}(u)-Z_{01}(u)=ca\,u\,da\,u:sa\,u,\ \ Z_{10}(u)-Z_{01}(u)=-sa\,u\,da\,u:ca\,u\,,$

$Z_{00}(u)-Z_{01}(u)=-k^2 sa\,u\,ca\,u:da\,u.$

XVII. Addition und Transformation.

1) $Z_{00}(u+v)=Z_{00}(u)+Z_{00}(v)+k^2k'^2\dfrac{sa\,u\,sa\,v\,sa(u+v)}{da\,u\,da\,v\,da(u+v)}.$

2) $Z_{01}(u+v)=Z_{01}(u)+Z_{01}(v)-k^2 sa\,u\,sa\,v\,sa(u+v).$

3) $Z_{10}(u+v)=Z_{10}(u)+Z_{10}(v)-k'^2\dfrac{sa\,u\,sa\,v\,sa(u+v)}{ca\,u\,ca\,v\,ca(u+v)}.$

4) $Z_{11}(u+v)=Z_{11}(u)+Z_{11}(v)+\dfrac{sa^3v\,ca\,u\,da\,u-sa^3u\,ca\,v\,da\,v}{sa\,u\,sa\,v\,(sa^2u-sa^2v)}.$

5) $iZ_{00}(iu,k)=\dfrac{u\pi}{2KK'}+Z_{00}(u,k'),\ \ iZ_{11}(iu,k)=\dfrac{u\pi}{2KK'}+Z_{11}(u,k').$

6) $iZ_{01}(iu,k)=\dfrac{u\pi}{2KK'}+Z_{10}(u,k')=-tga(u,k')\ da(u,k')+\dfrac{u\pi}{2KK'}+Z_{01}(u,k').$

7) $-\dfrac{E}{K}=\dfrac{\Theta''_{10}(0)}{\Theta_{10}(0)}=\dfrac{\Theta''_{01}(0)}{\Theta_{01}(0)}-1=\dfrac{\Theta''_{00}(0)}{\Theta_{00}(0)}-k'^2,\ \ \dfrac{\partial\, lg\, q}{\partial(k^2)}=\dfrac{\pi^2}{4K^2k^2k'^2}.$

8) $(\Theta'':\Theta)+(\bar\Theta'':\bar\Theta)=\pi:2KK'$, wenn Θ zum Modul k, $\bar\Theta$ zum Modul k' gehört.

XVIII. Elliptische Integrale dritter Gattung.

1) $\Pi(u,v,k)=\Pi(u,v)=u\,Z_{01}(v)+\tfrac{1}{2}\,lg\dfrac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u+v)}=\displaystyle\int_0^{(s,z)}\frac{a k^2\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)}\,z^2dz}{(1-a^2k^2z^2)s}$

$=\displaystyle\int_0^u\frac{k^2\,sa\,v\,ca\,v\,da\,v\,sa^2u\,du}{1-k^2sa^2v\,sa^2u},\ \ a=sa\,v.$

2) $\Pi(K,v)=KZ_{01}(v),\ \ \Pi(2iK',v)=2iK'Z_{01}(v)+vi\pi:K,\ \ \Pi(u,K)=0,\ \ \Pi(u,K+iK')=0,$

$\Pi(K+iK',v)=(K+iK')Z_{01}(v)+vi\pi:2K,\ \ \Pi(iK',v)=iK'Z_{01}(v)+(vi\pi:2K)+\tfrac{1}{2}i\pi.$

3) $\Pi(u+2K,v)=\Pi(u,v)+2KZ_{01}(v),\ \ \Pi(u,v+2K)=\Pi(u,v),\ \ \Pi(u,v+2iK')=\Pi(u,v),$

$\Pi(u+2iK',v)=\Pi(u,v)+2\,\Pi(K+iK',v)-2\,\Pi(K,v)$

$=\Pi(u,v)+2\displaystyle\int_K^{K+iK'}\frac{k^2\,sa\,v\,ca\,v\,da\,v\,sa^2u\,du}{1-k^2sa^2v\,sa^2u}=\Pi(u,v)+2iK'Z_{01}(v)+i\pi v:K.$

4) $K\Pi(K+iK',v)-(K+iK')\Pi(K,v)=\tfrac{1}{2}i\pi v,\ \ \Pi(-u,v,k)=-\Pi(u,v,k).$

5) $\Pi(u,v)-\Pi(v,u)=u\,Z_{01}(v)-v\,Z_{01}(u).$ (Vertauschung von Parameter und Argument.)

6) $\Pi(u+t,v)=\Pi(u,v)+\Pi(t,v)+\tfrac{1}{2}\,lg\dfrac{1+k^2sa\,u\,sa\,v\,sa\,t\,sa\,(u+t+v)}{1-k^2sa\,u\,sa\,v\,sa\,t\,sa\,(u+t-v)}.$

7) $\Pi(u,v+w)-\Pi(u,v)-\Pi(u,w)+k^2u\,sa\,v\,sa\,w\,sa(v+w)=\tfrac{1}{2}\,lg\dfrac{1+k^2sa\,u\,sa\,v\,sa\,w\,sa(u+w+v)}{1-k^2sa\,u\,sa\,v\,sa\,w\,sa(v+w-u)}.$

8) $\Pi(iu,iv+K;k)=\Pi(u,v+K';k'),\ \ \Pi(iu,v+K;k)=-\Pi(u,iv+K';k').$

9) $\Pi(u,\tfrac{1}{2}K)=\tfrac{1}{2}u(1-k')+\tfrac{1}{2}lg\,da(u+\tfrac{1}{2}K)-\tfrac{1}{4}lg\,k'$
$=\tfrac{1}{2}u(1-k')+\tfrac{1}{2}lg(da\,u-(1-k')\sqrt{k'}\,sa\,u\,ca\,u)-\tfrac{1}{2}lg(1-(1-k')sa^2u)$.

Liegt a zwischen 0 und 1, so setzt man am besten $a=sa\,v$; liegt a zwischen 1 und $1:k$, so setzt man $a=sa(iv+K)$; liegt a zwischen $1:k$ und ∞, so setzt man $a=sa(v+iK')$. Ist a rein imaginär, so setzt man $a=sa\,iv$.

Andere Formen von Integralen dritter Gattung sind (Jacobi's Werke I, pag. 537), (9.)

$$uZ_{01}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u+v)}=\int_0^u\frac{k^2\,sa\,v\,sa'v\,sa^2u\,du}{1-k^2sa^2u\,sa^2v},\qquad uZ_{11}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(v+u)}=\int_0^u\frac{(sa'v:sa\,v)\,du}{1-k^2sa^2v\,sa^2u},$$

$$uZ_{10}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u+v)}=\int_0^u\frac{ca'v\,da^2u\,du}{ca\,v(1-k^2sa^2u\,sa^2v)},\qquad uZ_{00}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u+v)}=\int_0^u\frac{da'v\,ca^2u\,du}{da\,v(1-k^2sa^2v\,sa^2u)},$$

$$uZ_{01}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{11}(v-u)}{\Theta_{11}(v+u)}=\int_0^u\frac{sa\,v\,sa'v\,du}{sa^2u-sa^2v},\qquad uZ_{11}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{11}(v-u)}{\Theta_{11}(v+u)}=\int_0^u\frac{ca\,v\,da\,v\,sa^2u\,du}{sa\,v\,(sa^2u-sa^2v)},$$

$$uZ_{10}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{11}(v-u)}{\Theta_{11}(v+u)}=\int_0^u\frac{-ca'v\,ca^2u\,du}{ca\,v\,(sa^2u-sa^2v)},\qquad uZ_{00}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{11}(v-u)}{\Theta_{11}(v+u)}=\int_0^u\frac{sa\,v\,ca\,v\,da^2u\,du}{da\,v\,(sa^2u-sa^2v)},$$

$$uZ_{01}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{10}(v-u)}{\Theta_{10}(v+u)}=\int_0^u\frac{sa\,v\,sa'v\,da^2u\,du}{ca^2v-da^2v\,sa^2u},\qquad uZ_{11}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{10}(v-u)}{\Theta_{10}(v+u)}=\int_0^u\frac{(sa'v:sa\,v)\,ca^2u\,du}{ca^2v-da^2v\,sa^2u},$$

$$uZ_{10}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{10}(v-u)}{\Theta_{10}(v+u)}=\int_0^u\frac{k'^2\,sa\,v\,da\,v\,sa^2u\,du}{ca\,v(ca^2v-da^2v\,sa^2u)},\qquad uZ_{00}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta_{10}(v-u)}{\Theta_{10}(v+u)}=\int_0^u\frac{k'^2\,sa\,v\,ca\,v\,du}{da\,v\,(ca^2v-da^2v\,sa^2u)},$$

$$uZ_{01}(v)=\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta(v-u)}{\Theta(v+u)}=\int_0^u\frac{k^2\,sa\,v\,sa'v\,ca^2u\,du}{da^2v-k^2ca^2v\,sa^2u},\qquad uZ_{11}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta(v-u)}{\Theta(v+u)}=\int_0^u\frac{(sa'v:sa\,v)\,da^2u\,du}{da^2v-k^2ca^2v\,sa^2u},$$

$$uZ_{10}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta(v-u)}{\Theta(v+u)}=\int_0^u\frac{k'^2(ca'v:ca\,v)\,du}{da^2v-k^2ca^2v\,sa^2u},\qquad uZ_{00}(v)+\tfrac{1}{2}lg\frac{\Theta(v-u)}{\Theta(u+v)}=\int_0^u\frac{k'^2(da'v:da\,v)\,sa^2u\,du}{da^2v-k^2ca^2v\,sa^2u}.$$

Ist $\sigma=\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}$, so folgt

$$10)\quad \frac{d}{d\zeta}lg\frac{\sigma\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)+\sigma_1\zeta\zeta_2(\zeta-\zeta_2)+\sigma_2\zeta\zeta_1(\zeta_1-\zeta)}{\sigma\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)+\sigma_1\zeta\zeta_2(\zeta_2-\zeta)+\sigma_2\zeta\zeta_1(\zeta-\zeta_1)}=\frac{\varkappa(\sigma_2\zeta_1+\sigma_1\zeta_2)}{\sigma(1-\varkappa\zeta_1\zeta_2)}+\frac{\sigma_1}{\sigma(\zeta-\zeta_1)}+\frac{\sigma_2}{\sigma(\zeta-\zeta_2)}+\frac{\sigma_3}{\sigma(\zeta-\zeta_3)},$$

$$\zeta_3=\frac{(\sigma_2\zeta_1+\sigma_1\zeta_2)^2}{\zeta_1\zeta_2(1-\varkappa\zeta_1\zeta_2)^2},\quad \sigma_3=\frac{\sigma_1\zeta_2\zeta_3(\zeta_3-\zeta_2)+\sigma_2\zeta_1\zeta_3(\zeta_1-\zeta_3)}{\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)},$$

$$\frac{d}{d\zeta}lg\frac{\sigma\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)+\sigma_1\zeta\zeta_2(\zeta-\zeta_2)+\sigma_2\zeta\zeta_1(\zeta-\zeta_1)}{\sigma\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)+\sigma_1\zeta\zeta_2(\zeta_2-\zeta)+\sigma_2\zeta_1\zeta(\zeta_1-\zeta)}=\frac{-\varkappa(\sigma_1\zeta_2-\sigma_2\zeta_1)}{\sigma(1-\varkappa\zeta_1\zeta_2)}+\frac{\sigma_1}{\sigma(\zeta-\zeta_1)}-\frac{\sigma_2}{\sigma(\zeta-\zeta_2)}+\frac{\sigma'_3}{\sigma(\zeta-\zeta'_3)},$$

$$\zeta'_3=\frac{(\sigma_1\zeta_2-\sigma_2\zeta_1)^2}{\zeta_1\zeta_2(1-\varkappa\zeta_1\zeta_2)^2},\quad \sigma'_3=\frac{\sigma_1\zeta_2\zeta'_3(\zeta'_3-\zeta_2)-\sigma_2\zeta_1\zeta'_3(\zeta_1-\zeta'_3)}{\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)},$$

woraus durch Addition folgt

$$11)\quad \frac{d}{d\zeta}lg\frac{\zeta\zeta_1\zeta_2(1-\varkappa\zeta_1\zeta_2)^2-(\zeta_1\sigma+\zeta\sigma_1)^2}{\zeta\zeta_1\zeta_2(1-\varkappa\zeta_1\zeta_2)^2-(\zeta_1\sigma-\zeta\sigma_1)^2}=\frac{-2\varkappa\sigma_1\zeta_2}{\sigma(1-\varkappa\zeta_1\zeta_2)}+\frac{2\sigma_1}{\sigma(\zeta-\zeta_1)}+\frac{\sigma_3}{\sigma(\zeta-\zeta_3)}+\frac{\sigma'_3}{\sigma(\zeta-\zeta'_3)}.$$

Diese Formeln können, wenn ζ_1, ζ_2 conjugirt imaginär genommen werden, dazu dienen, Integrale mit complexem Parameter durch solche mit reellem Parameter auszudrücken.

Für die numerischen Rechnungen mit elliptischen Functionen ist die Grösse q sehr einfach zu erhalten, kommt aber auch besonders oft vor. Es findet sich zwar von Jacobi (Gesammelte Werke I, pag. 363) eine Tafel vor, in der $k = \sin\vartheta$ gesetzt ist, und in der der logarithmus vulgaris von q für Werthe von ϑ, die um Zehntelminuten fortschreiten, auf 5 Decimalen angegeben ist, die z B. für

$$\vartheta = 5^0, \quad 15^0, \quad 30^0, \quad 45^0, \quad 60^0, \quad 80^0,$$

giebt $lgv\, q = 6{,}67813, \quad 7{,}63683, \quad 8{,}25461, \quad 8{,}63563, \quad 8{,}93347, \quad 9{,}31515.$

Genauere Tafeln jedoch, welche sich auch auf rein imaginäre k erstreckten, wären nützlich. In vielen Fällen wird es dem Rechner gelingen, durch Transformation ein reelles oder rein imaginäres k zu erhalten, für welches q so klein wird, dass in der Entwickelung VII), 3 der Sammlung, das erste Glied genügt; es wird also gelingen, für q einen algebraischen Ausdruck in k zu setzen.

Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

